Neuvième devoir surveillé

le 1er juin 2024, de 8h00 à 12h

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

I Problème - Algèbre linéaire

On étudie dans cet exercice la notion d'endomorphisme cyclique, définie ci-dessous :

> Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
> On dit que l'endomorphisme f est *cyclique* s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\big(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\big)$ est une base de l'espace vectoriel E.

Les quatre parties de l'exercice sont indépendantes.

I.A Premier exemple

Notons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ l'endomorphisme défini par : $\forall X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.

► **I.1** En considérant v, montrer que f est un endomorphisme *cyclique* de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

► **I.2** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_2)$.

– **a)** Déterminer les sous-espaces vectoriels E_2 et E_3 de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

– **b)** En déduire une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

► **I.3** Existe-il $w \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, non nul, tel que $(w, f(w))$ n'est pas une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

I.B Deuxième exemple

Soit maintenant $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶ **I.4** Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

▶ **I.5** L'endomorphisme g est-il cyclique ?

I.C Étude d'un troisième exemple

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

▶ **I.6** Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

▶ **I.7** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant.

– **a)** Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, exprimer $\Delta\left(X^k\right)$ sous forme développée.

– **b)** En déduire que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

▶ **I.8** Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

I.D Cas d'une matrice diagonale

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme qui admet une matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}$, de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

▶ **I.9** Soit v un élément de E. Comme $\mathcal{B}$ est une base, on dispose de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

– **a)** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h^k(v) = \alpha_1 \lambda_1^k e_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k e_n$.

– **b)** Montrer que la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ est liée si, et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, non nul, tel que $\alpha_1 P(\lambda_1) = 0, \ \ldots, \ \alpha_n P(\lambda_n) = 0$.

▶ **I.10** Prouver que h est cyclique si et seulement si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

II Problème - Analyse et probabilités

Un entier $n \geqslant 1$ et un réel $p \in]0,1[$ sont fixés. On considère $(X_1, \ldots, X_{2n})$ une famille de $2n$ variables aléatoires *indépendantes* définies sur un même espace probabilisé (Ω, P). Les variables aléatoires X_i sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et vérifient :

$$\forall i \in [\![1, 2n]\!], \quad \mathrm{P}(X_i = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_i = -1) = 1 - p.$$

Ces variables X_i représentent les résultats des lancers successifs d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée. Un point se déplace aléatoirement sur un axe selon le résultat des lancers. Les abscisses successives $(S_1, \ldots, S_{2n})$ du point sont définies par :

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, 2n]\!], \ S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine, c'est-à-dire obtenir $S_k = 0$, que lorsque le nombre k de lancers de la pièce est un entier pair.

II.A Retours à l'origine

▶ **II.1** Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.

▶ **II.2** Vérifier que pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\mathrm{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k$.

▶ **II.3** Soient $j \in [\![1, 2n]\!]$ et $k \in [\![1, 2n - j]\!]$. On pose $S'_k = S_{j+k} - S_j$.

– **a)** Montrer que $S'_k \overset{\text{loi}}{\sim} S_k$, c'est-à-dire que S'_k et S_k suivent la même loi.

– **b)** Montrer que $S'_k \perp\!\!\!\perp S_j$, c'est-à-dire que S'_k et S_j sont indépendantes.

Dans la suite du sujet, on admettra que plus généralement :

$$(S'_1, \ldots, S'_{2n-j}) \overset{\text{loi}}{\sim} (S_1, \ldots, S_{2n-j}). \quad \textit{et} \quad (S'_1, \ldots, S'_{2n-j}) \perp\!\!\!\perp (S_1, \ldots, S_j)$$

▶ **II.4** On introduit les réels $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$ définis par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = \mathrm{P}(S_{2k} = 0) \quad \text{et} \quad b_k = \mathrm{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2k-1} \neq 0] \cap [S_{2k} = 0]\big).$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En décomposant l'évènement $[S_{2k} = 0]$ selon l'indice du 1$^{\text{er}}$ retour du point à l'origine, établir la relation $a_k = \sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}$.

II.B Dernier retour à l'origine

On se place dans le cas particulier $p = 1/2$, qui correspond à une pièce équilibrée. On s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_n(\omega) = \max \{k \in [\![0, 2n]\!] \mid S_k(\omega) = 0\}.$$

On appelle *chemin* toute liste $((i, s_i),\ \ldots,\ (j, s_j))$ de couples d'entiers telle que :

$$\forall k \in [\![i+1, j]\!], \quad s_k - s_{k-1} \in \{-1, 1\}.$$

Un chemin peut se représenter par une ligne polygonale reliant (i, s_i) à (j, s_j).

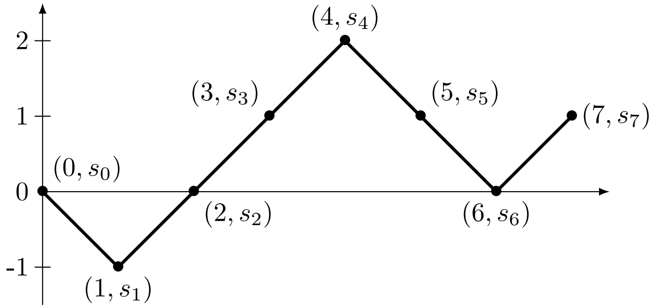


FIGURE 1 – Un chemin reliant les points $(0, 0)$ et $(7, 1)$

▶ **II.5 Équiprobabilité des chemins.** Soient $k \in [\![1, 2n]\!]$ et $x \in \mathbb{Z}$. On note $N_{k,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0, 0)$ au point (k, x).

– **a)** Pour tout chemin $((0, s_0), (1, s_1), \ldots, (k, s_k))$ tel que $s_0 = 0$, calculer la probabilité :

$$\mathrm{P}\big([S_1 = s_1] \cap [S_2 = s_2] \cap \cdots \cap [S_k = s_k]\big).$$

– **b)** En déduire la relation $\mathrm{P}(S_k = x) = \dfrac{N_{k,x}}{2^k}$.

– **c)** Préciser la valeur de $N_{k,x}$ en distinguant les cas selon la parité de x.

▶ **II.6 Principe de réflexion.** Soient k et x des entiers *strictement positifs.*

– **a)** Étant donné $y \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il y a autant :

- de chemins reliant $(0, x)$ à (k, y) et passant par au moins un point d'ordonnée 0 ;
- que de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (k, y).

– **b)** En déduire que le nombre de chemins reliant $(1,1)$ à (k,x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à $N_{k-1,x-1} - N_{k-1,x+1}$.

▶ **II.7 Application à la marche aléatoire.** Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $x \in \mathbb{N}^*$.

– **a)** Montrer que la probabilité $\mathrm{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2k-1} > 0] \cap [S_{2k} = 2x]\big)$ vaut :

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}(S_{2k-1} = 2x-1) - \mathrm{P}(S_{2k-1} = 2x+1)\right).$$

– **b)** En justifiant que $[S_{2k} > 0] = \displaystyle\bigcup_{x=1}^{k} [S_{2k} = 2x]$, démontrer la formule :

$$\mathrm{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2k-1} > 0] \cap [S_{2k} > 0]\big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(S_{2k} = 0).$$

– **c)** En déduire que $\mathrm{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2k-1} \neq 0] \cap [S_{2k} \neq 0]\big) = \mathrm{P}(S_{2k} = 0)$.

▶ **II.8 Détermination de la loi.** Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

– **a)** Montrer que $\mathrm{P}(T_n = 2k) = \mathrm{P}(S_{2k} = 0) \times \mathrm{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big)$.

– **b)** En déduire l'expression suivante :

$$\mathrm{P}(T_n = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

▶ **II.9 Observation remarquable.**

– **a)** On pose $T'_n = 2n - T_n$. Montrer que $T'_n \overset{\text{loi}}{\sim} T_n$ et déterminer l'espérance de T_n.

– **b)** Supposons que deux personnes parient chacune un euro à jeu de hasard équilibré, chaque jour de l'année, l'une contre l'autre. Quelle est la probabilité qu'un des joueurs cumule un gain positif pendant toute la deuxième moitié de l'année (de 366 jours) ?

II.C Loi de l'arcsinus de Paul Lévy

Dans cette partie, α et β sont deux réels fixés tels que $0 < \alpha < \beta < 1$. L'objectif est d'étudier la convergence de $\mathrm{P}\left(\dfrac{T_n}{2n} \in [\alpha,\beta]\right)$ lorsque $n \to \infty$.

On admet la formule suivante, démontrée dans le DM 5 : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$.

▶ **II.10** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $s_n(\alpha,\beta) = \displaystyle\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$.

– **a)** Déterminer un équivalent simple de $\dbinom{2n}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.

– **b)** En déduire la relation asymptotique suivante :

$$\sum_{k\in\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4^n}{\pi}\,s_n(\alpha,\beta).$$

Indication : établir la convergence du quotient en revenant à la définition des limites.

▶ **II.11** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ l'unique fonction continue, constante sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et sur l'intervalle $[\beta,1]$, qui vérifie :

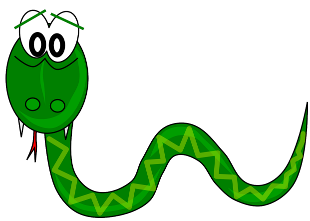
$$\forall t\in[\alpha,\beta],\quad f(t)=\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

En utilisant avec soin des sommes de Riemann, montrer que $(s_n(\alpha,\beta))$ tend vers

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

▶ **II.12** Conclure en démontrant, finalement, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\frac{T_n}{2n}\in[\alpha,\beta]\right)=\frac{2}{\pi}\left(\arcsin(\sqrt{\beta})-\arcsin(\sqrt{\alpha})\right).$$



FIN