Premier devoir en temps libre

lundi 18 septembre

Exercice 1

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes et produits suivants :

Q.1 $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n} k(4n-k)$

Q.2 $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k+3)(2k+5)}$

Q.3 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n} (-1)^{\max(k,2n)}$

Q.4 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} 2^i$

Exercice 2

Rappel : un réel x est *rationnel* s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$. Il est dit *irrationnel* sinon. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Q.5 Soient x, y deux réels. Montrer que :

$$(x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies (x + y \in \mathbb{Q} \text{ et } x \times y \in \mathbb{Q}).$$

Q.6 Un produit d'irrationnels est-il toujours irrationnel ? Une somme d'irrationnels est-elle toujours irrationnelle ? *(indication : on rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel)*

Q.7 Soit x un réel. Montrer que si x^2 est irrationnel, alors x est irrationnel aussi.

Q.8 Soient x, y réels. Montrer par l'absurde que : $(x \notin \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies x - y \notin \mathbb{Q}$.

Problème

Les nombres de Fibonacci sont les termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Préliminaires

On démontre ici quelques résultats qui serviront dans la dernière partie.

Q.9 Déterminer tous les nombres de Fibonacci inférieurs à 100.

Q.10 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre F_n est un entier naturel non nul.

Q.11 Montrer que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2 et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n - 1.$$

Q.12 On note P la proprosition suivante : $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant 2,\ (F_k \leqslant n \implies F_{k+1} \leqslant n)$.

(a) Déterminer la négation de P.

(b) Montrer que si P est vraie, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \geqslant 2,\ F_k \leqslant n$.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $F_k \leqslant n < F_{k+1}$ et que cet entier est unique.

Diagonales de Pascal

Cette partie est indépendante du reste du problème.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note D_n la sommes des coefficients binomiaux situés, dans le triangle de Pascal, sur la diagonale ascendante partant de $\binom{n}{0}$. Autrement dit :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Q.13 En effectuant le changement d'indice $k' = k + 1$ dans la somme D_n, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n + D_{n+1} = D_{n+2}.$$

Q.14 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = F_{n+1}$.

Formule de Binet

Cette partie est indépendante du reste du problème.

Q.15 Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ d'inconnue x admet deux solutions réelles, notées φ et ψ, qui vérifient $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. Calculer la somme $\varphi + \psi$ et le produit $\varphi\psi$.

Q.16 On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $G_n = F_{n+1} - \varphi F_n$.

(a) Montrer que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison ψ.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{F_n}{\varphi^n} - \frac{F_0}{\varphi^0} = \frac{1}{\varphi}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^k.$$

Q.17 Donner finalement une expression de F_n en fonction de n.

Théorème Z

Le but de cette partie est de démontrer le théorème Z, qui affirme que tout entier naturel non nul s'écrit de façon unique comme somme de nombres de Fibonacci distincts non consécutifs.

Pour a, b entiers naturels, on notera $a >> b$ lorsque $a - b \geqslant 2$. Étant donné un entier naturel non nul n, on appelle Z-décomposition de n toute décomposition

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont des entiers vérifiant $k_1 >> k_2 >> \cdots >> k_p >> 0$.

Q.18 Trouver une Z-décomposition pour chaque entier de 1 à 13.

Q.19 Démontrer par récurrence forte que tout $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une Z-décomposition où k_1 est déterminé par l'encadrement $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$.

Q.20 Démontrer de plus que toute Z-décomposition d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ vérifie nécessairement l'encadrement $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$ et qu'elle est unique.