Deuxième devoir en temps libre

Solutions

Exercice I – Encadrement de racines

Q.1 Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. D'après les identités remarquables, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$. Or $2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$, donc $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geqslant a+b$. On en déduit par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$|\sqrt{a} + \sqrt{b}| \geqslant \sqrt{a+b},$$

d'où le résultat demandé car $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant 0$.

Q.2 Rappeler sans démonstration l'inégalité triangulaire. En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

Solution. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\underbrace{|x-y+y|}_{|x|} \ \leqslant\ |x-y| + |y|.$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, et en appliquant la question précédente aux réels positifs $|x-y|$ et $|y|$, on obtient :

$$\sqrt{|x|} \ \leqslant\ \sqrt{|x-y|+|y|} \ \leqslant\ \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y|},$$

d'où le résultat.

Q.3 Démontrer finalement les encadrements suivants :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \ \leqslant\ \sqrt{|x-y|} \ \leqslant\ \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Solution. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente, on sait déjà que :

$$\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

et on obtient de même pour le couple (y,x) :

$$\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} \leqslant \underbrace{\sqrt{|y-x|}}_{\sqrt{|x-y|}}, \quad \text{d'où} \quad -\sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

D'après le lemme d'encadrement, on en déduit la première partie de l'inégalité demandée.

Pour l'autre moitié, on utilise à nouveau l'inégalité triangulaire $|x-y| \leqslant |x| + |-y|$, où $|-y| = |y|$ et on obtient en raisonnant comme à la question précédente :

$$\sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{|x|+|y|} \leqslant \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Exercice II – Pentagone régulier

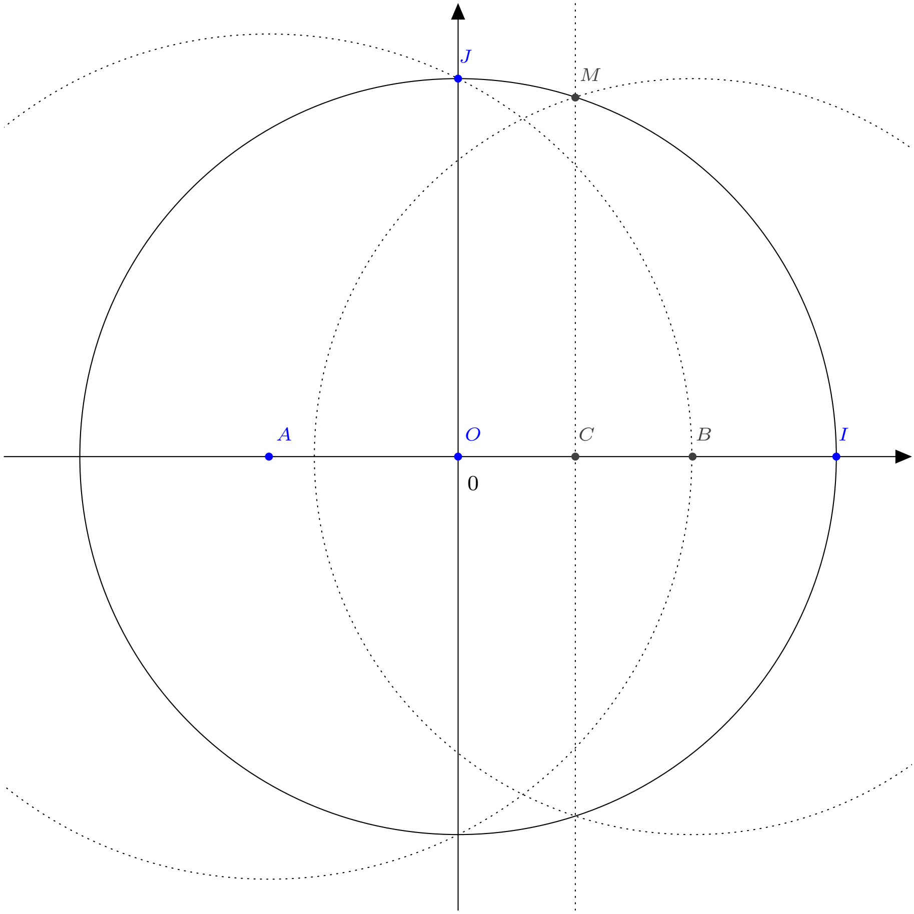
Considérons le plan euclidien usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$ par le choix d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère les points $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $A(-\frac{1}{2}, 0)$, puis on construit successivement :

- Le point B, intersection du segment $[OI]$ avec le cercle de centre A et de rayon AJ.
- Le point C, milieu de $[OB]$ et la droite $\mathscr{D}$, médiatrice du segment $[OB]$.
- Le point M, de coordonnées positives, à l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Les constructions géométriques ne devront utiliser que la règle et le compas.

Q.4 Tracer la figure pour une unité de 5 cm, en laissant les traits de construction.

Solution. On trace un cercle de centre B et de rayon 1. L'intersection avec le cercle $\mathscr{C}$ donne deux points équidistants de O et B, qui déterminent la médiatrice de $[O, B]$ ainsi que M.



Q.5 Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

(a) Montrer que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. En déduire $\cos(2\alpha)$, puis $\cos(3\alpha)$.

Solution. Par produit scalaire :

$$\cos(\alpha) = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OB}\|,$$

avec de plus $OB = AB - AO = AJ - AO$. On sait que $AO = \dfrac{1}{2}$.

Calculons AJ à l'aide théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AOJ :

$$AJ^2 = AO^2 + OJ^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

D'où $AJ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$.
Par formule de duplication :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8} - 1 = \frac{-2\sqrt{5}-2}{8} = \boxed{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

Puis par formules d'addition et duplication à nouveau :

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\
&= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2 \\
&= \cos(\alpha)\big(\cos(2\alpha) - 2\sin(\alpha)^2\big) \\
&= \cos(\alpha)\,(2\cos(2\alpha) - 1) \\
&= -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{5}+3}{2} \\
&= -\frac{2\sqrt{5}+2}{8} \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}
\end{aligned}$$

(b) Résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(3x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$, puis déterminer α.

Solution. Pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = \cos(3x) &\iff 2x \equiv 3x\ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -3x\ [2\pi] \\
&\iff x \equiv 0\ [2\pi] \text{ ou } 5x \equiv 0\ [2\pi] \\
&\iff 5x \equiv 0\ [2\pi]
\end{aligned}$$

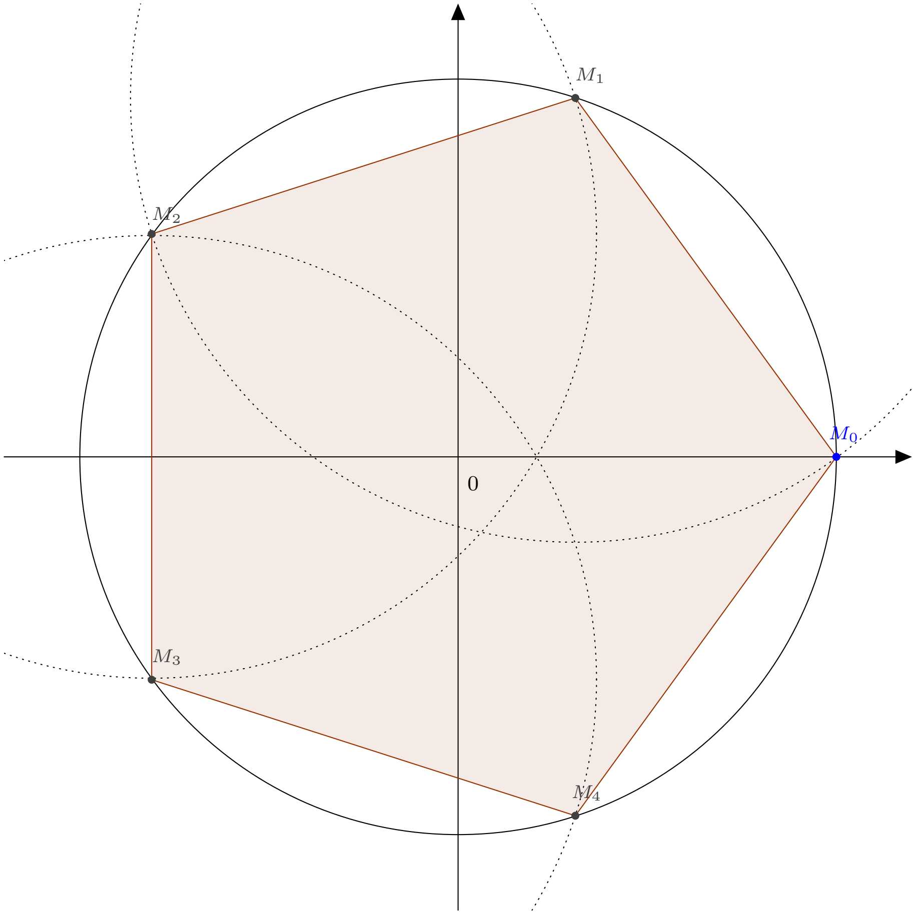
Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont donc les réels $\dfrac{2\pi k}{5}$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$.

Une seule de ces solutions satisfait l'hypothèse $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, donc : $\boxed{\alpha = \dfrac{2\pi}{5}}$.

Q.6 Construire, en justifiant, un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

Solution. Partant d'un cercle de centre O passant par un point I, la construction précédente donne un point M sur le cercle tel que l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ mesure $\dfrac{2\pi}{5}$ (modulo 2π).

En notant $M_0 = I$ et $M_1 = M$, il reste à reporter trois fois la distance M_0M_1 avec le compas pour construire trois autres points M_2, M_3, M_4 sur le cercle tels que les angles $(\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_{i+1}})$ pour $0 \leqslant i \leqslant 3$ ont tous pour mesure $\dfrac{2\pi}{5}$. Le pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ est régulier.



Exercice III – Sommes binomiales

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $\quad Z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\mathbf{i}\, 2\pi k/n}$.

Q.7 Exprimer le nombre complexe Z_n sous forme trigonométrique.

Solution. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n.$$

On factorise avec l'angle moitié :

$$1+e^{i\frac{2\pi}{n}} = \left(e^{-i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{\pi}{n}}\right)e^{i\frac{\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}},$$

d'où finalement

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i\frac{2\pi k}{n}} = 2^n\,\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i\pi}}.$$

Lorsque $n \geqslant 3$ il s'agit bien de la forme trigonométrique car $\cos(\frac{\pi}{n}) > 0$.

Si $n=2$ alors la somme vaut 0. Si $n=1$ alors la somme vaut $(-2)^1 e^{i\pi} = 2$.

Q.8 En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right) = 2^{n-1}\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$

Solution. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

D'après la formule du binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\,1^k = (1+1)^n = 2^n,$$

et d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \mathfrak{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right] = 2^n\,\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathfrak{Re}(e^{i\pi}) = -2^n\,\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Exercice IV – Complexes et géométrie

Soient O, A, B les points du plan usuel dont les affixes sont 0, -1 et 1. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de O, A, B. À tout point $M \in \mathscr{E}$ d'affixe z, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

Q.9 Prouver que M, N et P sont deux à deux distincts.

Solution. Si M et N sont confondus, alors $z = z^2$ et donc $z(z-1) = 0$ mais ceci est absurde car $z \neq 0$ et $z \neq 1$. Par contraposée, $M \neq N$. De même :

$$z^3 = z^2 \iff z^2(z-1) = 0 \iff (z = 0 \text{ ou } z = 1)$$

donc $N \neq P$. Enfin, $M \neq P$ aussi car :

$$z^3 = z \iff z(z^2-1) \iff (z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -1).$$

Q.10 On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP est rectangle en P.

(a) Démontrer les équivalences suivantes :

$$MNP \text{ est rectangle en } P \iff |z|^2 + \operatorname{Re}(z) = 0 \iff \left(z + \tfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \tfrac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{4}.$$

Solution. Méthode élémentaire : par théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} MNP \text{ est rectangle en } P &\iff MN^2 = MP^2 + NP^2 \\ &\iff |z^2 - z|^2 = |z^3 - z|^2 + |z^3 - z^2|^2 \end{aligned}$$

On peut factoriser les trois termes par $|z(z-1)|^2$, donc par division :

$$\begin{aligned} MNP \text{ est rectangle en } P &\iff 1 = |z+1|^2 + |z|^2 \\ &\iff 1 = \overline{(z+1)}(z+1) + \overline{z}z \\ &\iff 1 = 2\,\overline{z}z + \overline{z} + z + 1 \\ &\iff 0 = 2\left[|z|^2 + \mathfrak{Re}(z)\right] \end{aligned}$$

car $\overline{z}z = |z|^2$ et $\overline{z} + z = 2\,\mathfrak{Re}(z)$. Ceci donne déjà la première équivalence, et on obtient la seconde en remarquant que :

$$\left(z + \tfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \tfrac{1}{2}\right)} - \frac{1}{4} = \overline{z}z + \frac{1}{2}(\overline{z} + z) = |z|^2 + \mathfrak{Re}(z).$$

Méthode par quotient d'affixes. Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ ont pour affixes $z^3 - z = z(z-1)(z+1)$ et $z^3 - z^2 = z^2(z-1)$. Par caractérisation de l'orthogonalité,

$$(MP)\perp(NP) \iff \frac{z(z-1)(z+1)}{z^2(z-1)} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z+1}{z} \in i\mathbb{R}.$$

La caractérisation des imaginaires purs par conjugaison donne par ailleurs :

$$\frac{z+1}{z} \in i\mathbb{R} \iff \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}} = -\frac{z+1}{z} \iff (\overline{z}+1)z = -(z+1)\overline{z},$$

ce qui conduit comme précédemment à la condition $2|z|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z) = 0$.

(b) En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ recherché.

Solution. On remarque simplement que :

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \iff \left|z+\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \iff \left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$, autrement dit le cercle de diamètre $[AO]$, privé des points A et O.

Q.11 Soit M un point de $\mathscr{E}$ et z son affixe, de module $\rho > 0$ et d'argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.

(a) On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que l'affixe de P est un réel strictement positif. Montrer que $\mathscr{F}$ est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées d'un nombre fini de points).

Solution. Par calcul d'argument :

$$z^3 \in \mathbb{R}_+^* \iff \operatorname{Arg}(z^3) \equiv 0\ [2\pi] \iff 3\operatorname{Arg}(z) \equiv 0\ [2\pi] \iff 3\theta \equiv 0\ [2\pi].$$

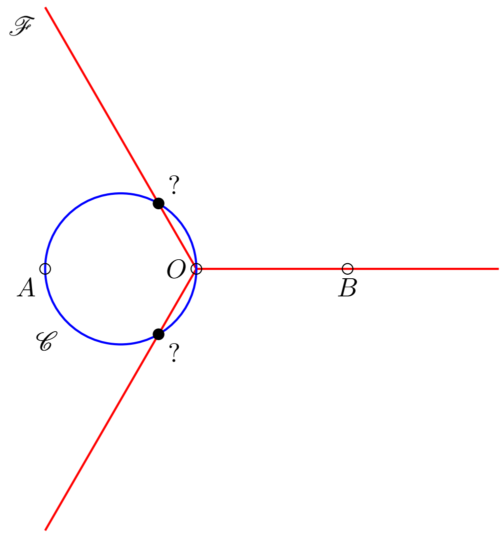
Ainsi, les éléments de $\mathscr{F}$ sont les points d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ tel que :

$$z = \rho \quad \text{ou} \quad z = \rho e^{i2\pi/3} \quad \text{ou} \quad z = \rho e^{i4\pi/3}$$

où ρ est un paramètre dans $\mathbb{R}_+^*$ (quelconque). L'ensemble $\mathscr{F}$ est donc la réunion des trois demi-droites issues de O et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1)$, $\overrightarrow{v}(e^{i2\pi/3})$ et $\overrightarrow{w}(e^{i4\pi/3})$, privée du point O et du point B.

(b) Représenter les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ dans un repère orthonormé du plan.

Solution.



(c) Déterminer tous les points d'intersection des ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$.

Solution. D'après les questions précédentes, on cherche les points M d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$, tels que $M \in \mathscr{C}$:

$$M \in \mathscr{C} \iff |z|^2 + \mathfrak{Re}(z) = 0 \iff \rho^2 + \rho \cos\theta = 0 \iff \rho + \cos\theta = 0.$$

- Pour $\theta = 0$, il n'existe pas de solution car $\rho > 0$ et $\cos 0 = 1$.
- Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$, l'unique solution est donnée par $\rho = -\cos\frac{2\pi}{3}$:

$$z_1 = \frac{1}{2}e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}.$$

- Pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$, l'unique solution est donnée par $\rho = -\cos\frac{4\pi}{3}$:

$$z_2 = \frac{1}{2}e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}.$$

Conclusion : les seuls points d'intersection sont les points d'affixes z_1 et z_2.

Exercice V – Équation complexe

Résoudre l'équation suivante d'inconnue z dans $\mathbb{C}$:

$$e^z + e^{-z} = \frac{3-i}{2}.$$

Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. En notant $Z = e^z$ (nécessairement non nul), on remarque que $e^z + e^{-z} = \dfrac{Z^2+1}{Z}$. Donc z est solution si et seulement si Z vérifie :

$$Z^2 - \frac{3-i}{2}Z + 1 = 0. \tag{$\clubsuit$}$$

On reconnaît une équation du second degré, dont le discriminant vaut :

$$\Delta = \frac{(3-i)^2}{4} - 4 = -\frac{4+3i}{2}.$$

On cherche les racines carrées de Δ sous forme algébrique et on obtient :

$$\pm\left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right).$$

Les solutions de l'équation ($\clubsuit$) de degré 2 sont donc :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3-i}{2} + \frac{1-3i}{2}\right) = 1-i, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{3-i}{2} - \frac{1-3i}{2}\right) = \frac{1+i}{2}.$$

En passant sous forme trigonométrique, on a donc :

$$z \text{ est solution} \iff \left(e^z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \quad \text{ou} \quad e^z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}.\right)$$

Par cas d'égalité des exponentielles complexes, les solutions sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = \dfrac{\ln 2}{2} \\ \mathfrak{Im}(z) \equiv -\dfrac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = -\dfrac{\ln 2}{2} \\ \mathfrak{Im}(z) \equiv \dfrac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

Les solutions sont donc les $\pm\left[\dfrac{\ln 2}{2} - i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$ où k parcourt $\mathbb{Z}$ (paramètre).