Troisième devoir en temps libre

partie 1 sur 2

Solutions

I Fonction rationnelle

Soit E l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 + 2z + 2 \neq 0$. On considère l'application f définie de E dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in E, \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}.$$

Q.1 Déterminer l'ensemble E.

Solution. La forme canonique $z^2 + 2z + 2 = (z+1)^2 + 1$ conduit directement aux deux racines $-1+i$ et $-1-i$, d'où :

$$\boxed{E = \mathbb{C} \setminus \{-1+i,\ -1-i\}}.$$

Q.2 On considère l'équation $f(z) = \dfrac{1}{4}$ d'inconnue z dans E.

(a) Déterminer les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

Solution. On résout pour $z \in E$:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{4} &\iff z^2 + 2z + 2 = 4z \\ &\iff z^2 - 2z + 2 = 0 \\ &\iff (z-1)^2 = -1. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc :

$$\boxed{1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \quad \text{et} \quad \boxed{1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}.$$

(b) Rappeler la définition de l'injectivité. L'application f est-elle injective ?

Solution. Une application $f : E \to F$ est injective lorsque :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ \left(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\right)}.$$

En posant $x_1 = 1 + i$ et $x_2 = 1 - i$, on constate que $x_1 \neq x_2$ bien que $f(x_1) = f(x_2)$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est donc pas injective.}}$$

Q.3 Soit $\omega \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer, en fonction de ω, le nombre d'éléments $z \in E$ tels que $f(z) = \omega$.

Solution. On début la résolution pour $z \in E$:

$$f(z) = \omega \iff \omega z^2 + (2\omega - 1)z + 2\omega = 0.$$

Si $\omega = 0$, l'unique solution est $z = 0$.

Si $\omega \neq 0$, c'est une équation du second degré. Le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ est toujours 2, sauf si le discriminant Δ est nul. De plus toute solution z appartient nécessairement à E car sinon elle vérifierait $z = \omega(z^2 + 2z + 2) = 0$. Il reste à étudier le discriminant :

$$\Delta = (2\omega - 1)^2 - 8\omega^2$$

ce qui vaut 0 si et seulement si $2\omega - 1 = \pm 2\sqrt{2}\omega$, c'est à dire

$$\omega = \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{1}{2 - 2\sqrt{2}}.$$

Conclusion. Le nombre d'éléments $z \in E$ tels que $f(z) = \omega$ est :

- 1 si $\omega \in \left\{0, \dfrac{1}{2 + 2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2 - 2\sqrt{2}}\right\}$;
- 2 sinon.

(b) Rappeler la définition de la surjectivité. L'application f est-elle surjective ?

Solution. Une application $f : E \to F$ est surjective lorsque :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y}.$$

D'après la question précédente, tout $\omega \in \mathbb{C}$ admet au moins un antécédent.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc surjective.}}$$

Q.4 Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Solution. Il s'agit de déterminer les éléments $z \in E$ tels que $f(z)$ est réel :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff \overline{f(z)} = f(z) \\ &\iff \overline{z}(z^2 + 2z + 2) = z\overline{z^2 + 2z + 2} \\ &\iff z|z|^2 + 2|z|^2 + 2\overline{z} = \overline{z}|z|^2 + 2|z|^2 + 2z \\ &\iff (z - \overline{z})|z|^2 - 2(z - \overline{z}) = 0 \\ &\iff z - \overline{z} = 0 \text{ ou } |z|^2 - 2 = 0 \\ &\iff \boxed{z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la condition $z \in E$:

l'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{R})$ est la réunion de la droite des réels et du cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$, privé des points $-1 + i$ et $-1 - i$.

Q.5 Décomposer f en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

Solution. Cette fonction rationnelle admet deux pôles simples en

$$-1 + i \quad \text{et} \quad -1 - i.$$

Elle admet donc un développement en éléments simples pour tout $z \in E$:

$$f(z) = Q(z) + \frac{\alpha}{z - (-1 + i)} + \frac{\beta}{z - (-1 - i)}$$

dans lequel :

- $Q(z) = 0$ est le quotient de la division euclidienne de z par $z^2 + 2z + 2$;
- les constantes α, β sont données par :

$$\alpha = \lim_{z \to (-1+i)} \frac{z}{(z - (-1 - i))} = \frac{-1 + i}{2i} = \frac{1 + i}{2}.$$

et

$$\beta = \lim_{z \to (-1-i)} \frac{z}{(z-(-1+i))} = \frac{-1-i}{-2i} = \frac{1-i}{2}.$$

Conclusion : pour tout $z \in E$,

$$\boxed{f(z) = \frac{\frac{1+i}{2}}{z+1-i} + \frac{\frac{1-i}{2}}{z+1+i}}.$$

II Zigzag bijectif

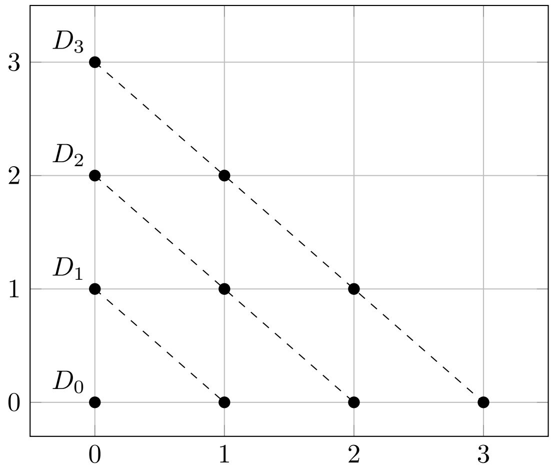
Le but de cet exercice est d'étudier l'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, \quad \varphi(x,y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$

Q.6 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble D_n de tous les couples $(k, n-k)$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

(a) Représenter les parties D_0, D_1, D_2, D_3 de $\mathbb{N}^2$ dans un repère du plan.

Solution.



(b) Démontrer que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \mathbb{N}^2.$$

Solution.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a en particulier $n-k \geqslant 0$ et donc $(k, n-k) \in \mathbb{N}^2$. Ceci montre que $D_n \subset \mathbb{N}^2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par union, on en déduit que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset \mathbb{N}^2.$$

- Établissons l'inclusion réciproque. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x, y) \in D_n$. On pose pour cela $n = x + y$. En notant $k = x$, on constate alors que $(x, y) = (k, n-k)$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Q.7 Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers définie par $t_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n + n + 1$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution. On procède par récurrence :

- Pour $n = 0$, on a $t_0 = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Compte tenu de la relation de récurrence,

$$t_{n+1} = t_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

d'où le résultat au rang $n+1$.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, expliciter l'image directe $\varphi(D_n)$ à l'aide de t_n.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\varphi(k, n-k) = k + \frac{(k+n-k)(k+n-k+1)}{2} = k + \frac{n(n+1)}{2} = k + t_n.$$

On en déduit que $\varphi(D_n)$ est l'ensemble des entiers de t_n à $n + t_n$:

$$\boxed{\varphi(D_n) = \left\{0 + t_n,\ 1 + t_n,\ \cdots,\ n + t_n\right\}}.$$

(c) Montrer que la famille des images directes $\varphi(D_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est un recouvrement disjoint de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x \in \varphi(D_n) &\iff \frac{n(n+1)}{2} \leqslant x < \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &\iff n^2 + n \leqslant 2x < n^2 + 3n + 2 \\ &\iff (n + \tfrac{1}{2})^2 \leqslant 2x + \tfrac{1}{4} < (n + \tfrac{3}{2})^2 \\ &\iff n \leqslant \sqrt{2x + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} < n + 1 \\ &\iff n = \left\lfloor \sqrt{2x + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} \right\rfloor . \end{aligned}$$

Cette partie entière est positive car $\sqrt{2x + \frac{1}{4}} \geqslant \frac{1}{2}$. Donc il existe bien $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \varphi(D_n)$. D'où l'inclusion :

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(D_n).$$

Comme les $\varphi(D_n)$ sont des parties de $\mathbb{N}$, leur union aussi. On en déduit l'égalité de ces ensembles, c'est-à-dire qu'on a bien un recouvrement de $\mathbb{N}$.

Il reste à montrer que les parties de ce recouvrement sont disjointes deux à deux. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Supposons que $\varphi(D_m) \cap \varphi(D_n)$ n'est pas vide. On dispose alors de $x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \varphi(D_m)$ et $x \in \varphi(D_n)$, donc :

$$m = \left\lfloor \sqrt{2x + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2} \right\rfloor = n$$

d'après les équivalences précédentes. Par contraposée, il vient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m \neq n \implies \varphi(D_m) \cap \varphi(D_n) = \emptyset) .$$

Q.8 *Injectivité et surjectivité.*

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $\varphi|_{D_n}$ est injective de D_n dans $\mathbb{N}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a \in D_n$ et $b \in D_n$ tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Par définition de D_n, on dispose d'entiers k, ℓ tels que $a = (k, n-k)$ et $b = (\ell, n - \ell)$ donc

$$\varphi(a) = \varphi(k, n-k) = k + t_n, \quad \text{et de même} \quad \varphi(b) = \ell + t_n.$$

Or $\varphi(a) = \varphi(b)$, donc $k = \ell$ et ceci entraîne directement que $a = b$.

(b) Déduire des questions précédentes que φ est une injection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Solution. Soient $a \in \mathbb{N}^2$ et $b \in \mathbb{N}^2$ tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Montrons que $a = b$ nécessairement. D'après **Q.6**(b), on dispose d'entiers m, n tels que $a \in D_m$ et $b \in D_n$. Puisque $\varphi(D_m)$ et $\varphi(D_n)$ contiennent un même élément, on a nécessairement $m = n$ d'après **Q.7**(c). On conclut enfin avec **Q.8**(a) par injectivité de φ restreinte à D_n.

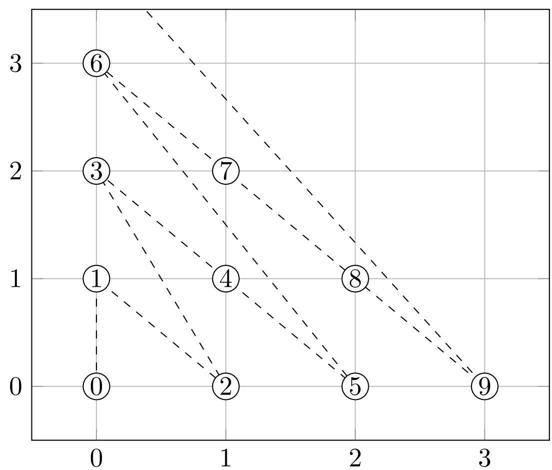
(c) Montrer finalement que φ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Solution. Il reste seulement à montrer que φ est surjective.

Soit $z \in \mathbb{N}$. On dispose d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $z \in \varphi(D_n)$ car ces parties forment un recouvrement de $\mathbb{N}$. Par définition de l'image directe, on dispose alors de $(x, y) \in D_n$ tel que $\varphi(x, y) = z$. Ce couple (x, y) est en particulier un antécédent de z dans $\mathbb{N}^2$.

Q.9 Sur la figure précédente, numéroter de 0 à 9 les points $\varphi^{-1}(k)$ pour $k \in \{0, \dots, 9\}$.

Solution. Voilà le début du zigzag !



Q.10 Construire à l'aide de φ une bijection ψ de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Solution. Posons l'application $\psi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ définie par $(x, y, z) \mapsto \varphi(x, \varphi(y, z))$.

- L'injectivité de φ permet d'établir celle de ψ. En effet, pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$

et $(x', y', z') \in \mathbb{N}^3$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(x', \varphi(y', z')) &\implies x = x' \text{ et } \varphi(y, z) = \varphi(y', z') \\ &\implies x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z' \\ &\implies (x, y, z) = (x', y', z'). \end{aligned}$$

- Montrons la surjectivité de ψ. Soit $t \in \mathbb{N}$. Par surjectivité de φ, on dispose de $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $t = \varphi(x, y)$. Par surjectivité de φ à nouveau, on dispose de $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ tel que $y = \varphi(x', y')$. On vérifie alors que $t = \psi(x, x', y')$ par définition de ψ.

Une conséquence remarquable de cet exercice est qu'il y a, en un certain sens, autant d'entiers naturels que de couples (ou de triplets, etc.) d'entiers naturels !