Troisième devoir en temps libre

partie 2 sur 2

Solutions

III Étude de fonctions

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1-e^x}$.

Q.11 *Étude de f.*

(a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f(x) + f(x)^2$.

Solution. Puisque $1-e^x$ ne s'annule qu'en $x=0$, la fonction f est dérivable par quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)+e^x e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2},$$

et par ailleurs l'égalité est vérifiée car :

$$f(x)+f(x)^2 = \frac{e^x}{1-e^x} + \frac{e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{(1-e^x)e^x+e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}.$$

(b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$, en précisant les limites aux bornes du domaine, puis tracer l'allure de son graphe et les éventuelles asymptotes.

Solution. La dérivée f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, donc la fonction f croît strictement sur cet intervalle.

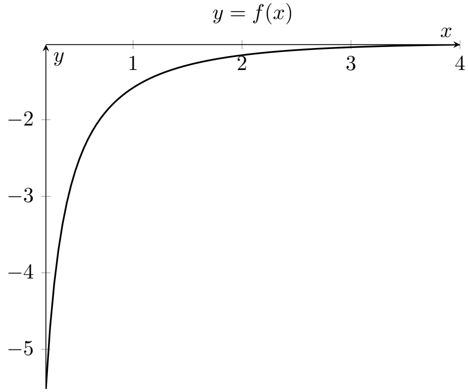
- Lorsque $x \to +\infty$:

$$\frac{e^x}{1-e^x} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x}-1)} = \frac{1}{e^{-x}-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{0-1} = -1.$$

On aura donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y=-1$.

- Lorsque $x \to 0^+$, $\quad e^x \to 1$ et $1 - e^x \to 0^-$ d'où $\dfrac{e^x}{1-e^x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.
  On aura donc une asymptote verticale en 0, d'équation $x = 0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow -1$



Q.12 *Bijectivité.*

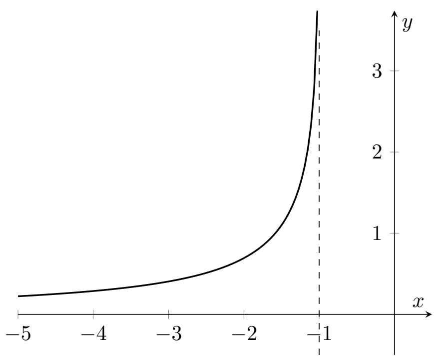
(a) Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle I, à expliciter.

Solution. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc c'est une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle image

$$\boxed{I \;=\; f(]0, +\infty[) \;=\;]-\infty, -1[} \quad \text{(limites)}.$$

(b) On note $g : I \to]0, +\infty[$ la bijection réciproque. Quelle est la monotonie de g ? Tracer l'allure de son graphe.

Solution. D'après le théorème de la bijection, la réciproque g est elle aussi strictement croissante. Son graphe se déduit de celui de f par symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.



Q.13 *Étude de la réciproque.*

(a) Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Solution. On sait que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, -1[$. De plus f' ne s'annule pas sur cet $]-0, +\infty[$ donc la réciproque g est dérivable sur $]-1, +\infty[$:

$$\forall y \in I, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f(g(y)) + f(g(y))^2} = \frac{1}{y + y^2} = \boxed{\frac{1}{y(1+y)}}.$$

(b) En déduire une expression de g.

Solution. D'après ce qui précède, g est une primitive de $y \mapsto \dfrac{1}{y(y+1)}$ sur l'intervalle $]-\infty, -1[$. Cette fraction rationnelle est somme de deux éléments simples, ce qui permet de l'intégrer facilement :

$$\int^y \frac{dt}{t(t+1)} = \int^y \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|y| - \ln|y+1| + \text{constante}.$$

Il existe donc un réel γ telle que :

$$\forall y \in \left]-\infty, -1\right[, \quad g(y) = \ln(-y) - \ln(-y-1) + \gamma = \ln\left(\frac{y}{y+1}\right) + \gamma.$$

Sachant que $\lim\limits_{-\infty} g = 0$, on peut en déduire la valeur de γ :

$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} \xrightarrow[y \to -\infty]{} 1$$

donc $g(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} \ln(1) + \gamma$ par continuité du logarithme. Ainsi, $\gamma = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall y \in \left]-\infty, -1\right[, \; g(y) = \ln\left(\frac{y}{y+1}\right)}$.

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$. Vérifier le résultat précédent en résolvant l'équation $f(x) = y$.

Solution. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = y \iff \frac{e^x}{1 - e^x} = y \iff e^x = y - ye^x \iff (y+1)e^x = y.$$

S'il existe une solution $x \in]0,+\infty[$, on a nécessairement $y \neq -1$ et $\frac{y}{y+1} > 1$, ce qui équivaut à $y+1<0$. On retrouve $f(]0,+\infty) \subset]-\infty,-1[$.

Réciproquement, si $y \in]-\infty,-1[$, on obtient une unique solution :

$$f(x)=y \iff e^x = \frac{y}{y+1} \iff x = \ln\left(\frac{y}{y+1}\right)$$

Conclusion. La fonction f est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,-1[$ et :

$$\forall y \in]-\infty,-1[\,, \quad f^{-1}(y) = g(y).$$

IV Fonctions multiplicatives sur-additives

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f, définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient les deux propriétés suivantes.

- Propriété **M** (multiplicativité) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.
- Propriété **SA** (sur-additivité) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x+y) \geqslant f(x)+f(y)$.

Partie A – Exemple

Soit $\alpha \geqslant 1$ un réel. On note f_α la fonction définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha \quad (\text{avec } 0^\alpha = 0 \text{ par convention}).$$

Q.11 Montrer, par étude de variations, que pour tout $t \in]0,+\infty[\,,\ (1+t)^\alpha \geqslant 1+t^\alpha$.

Solution. On considère $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $(1+t)^\alpha - 1 - t^\alpha$.

La fonction φ est dérivable par composition et combinaison linéaire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha\left[(1+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right] \geqslant 0.$$

En effet, $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est croissante car $\alpha - 1 \geqslant 0$. La fonction φ est donc croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée φ' est positive. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) \geqslant \lim_{s \to 0^+} \varphi(s),$$

c'est-à-dire $(1+t)^\alpha - 1 - t^\alpha \geqslant 0$ par continuité en 0 (en effet $\alpha > 0$).

Q.12 En déduire que f_α est solution du problème [on choisira t en fonction de x, y].

Solution.

- La fonction f_α vérifie la propriété **M** car :

$$\forall (x,y) \in \left]0,+\infty\right[^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha\, y^\alpha,$$

  et ceci reste vrai si $x=0$ ou $y=0$ car les deux termes sont alors nuls.

- Montrons que f_α vérifie la propriété **SA**. Quel que soit $(x,y) \in \left]0,+\infty\right[^2$, la question précédente donne :

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha \geqslant 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha.$$

  En multipliant par le réel positif x^α :

$$x^\alpha \left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha \geqslant x^\alpha + x^\alpha \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha,$$

  ce qui se simplifie en $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$ par multiplicativité.

  Cette inégalité est aussi vraie lorsque $x=0$ ou $y=0$ car $0^\alpha = 0$.

Partie B – Propriétés générales des solutions

Q.11 Quelles sont les fonctions *constantes* qui vérifient les propriétés **M** et **SA** ?

Solution. Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante $f : x \mapsto c$ est solution ssi :

- (propriété **M**) $c = c^2$, c'est-à-dire $c=0$ ou $c=1$;
- (propriété **SA**) et $c \geqslant 2c$, c'est-à-dire $0 \geqslant c$.

Ces deux conditions sont donc satisfaites ssi $c = 0$.

La seule solution constante est donc la fonction nulle.

Soit maintenant f une solution *non constante* du problème.

Q.11 Montrer que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Solution.

- En prenant $x=0$ et $y=0$, les propriétés **M** et **SA** donnent, comme pour les fonctions constantes, $\boxed{f(0)=0}$.
- On sait que f n'est pas constante donc on dispose d'un $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \neq 0$.

Or $f(x) = f(x)f(1)$ par la propriété **M** (avec $y = 1$), donc :

$$\boxed{f(1) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1}.$$

Q.12 Montrer que, pour tout réel positif x non nul, $f(x) \neq 0$ et $\dfrac{1}{f(x)} = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En prenant $y = x^{-1}$, la propriété **M** donne :

$$f(x)f(x^{-1}) = f(1) = 1,$$

donc en particulier $\boxed{f(x) \neq 0}$ et on obtient par division : $\boxed{f(x^{-1}) = f(x)^{-1}}$.

Q.13 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(x^n) = f(x)^n$ [on commencera par $n \in \mathbb{N}$].

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Commençons par montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x^n) = f(x)^n$ en raisonnant par récurrence. Pour $n = 0$, ceci revient à $f(1) = 1$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $f(x^n) = f(x)^n$. De la propriété **M** avec $y = x^n$, on déduit :

$$f(x^{n+1}) = f(x)f(x^n) = f(x)f(x)^n = f(x)^{n+1}.$$

- Pour passer au cas d'un entier négatif $n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}$, *il faut maintenant supposer* $x \neq 0$. Par définition $x^n = (\frac{1}{x})^m$, donc :

$$\begin{aligned} f(x^n) &= f(\tfrac{1}{x})^m && \text{(cas d'un entier naturel)} \\ &= (\tfrac{1}{f(x)})^m && \text{(question précédente)} \\ &= f(x)^n. \end{aligned}$$

Q.14 Montrer que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait déjà que $f(x) \neq 0$. En prenant $n = 2$ dans la question précédente et en remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$, il vient alors :

$$\boxed{f(x) = f(\sqrt{x})^2 > 0}.$$

Q.15 En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $x_1 < x_2$. Montrons que $f(x_1) < f(x_2)$.
En posant $x = x_2 - x_1$ et $y = x_1$, la propriété **SA** donne :

$$f(x_2 - x_1 + x_2) \geqslant f(x_2 - x_1) + f(x_1).$$

Le terme de gauche est $f(x_2)$. Par ailleurs $f(x_2 - x_1) + f(x_1) > f(x_1)$ car, d'après la question précédente, $f(x_2 - x_1) > 0$. On conclut par transitivité : $\boxed{f(x_2) > f(x_1)}$.

Partie C – Encadrement par des puissances de 2

On note toujours f une solution *non constante* quelconque du problème.

Q.11 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $k_n(x) = \left\lfloor \dfrac{n \ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

(a) Prouver, à l'aide d'un encadrement, que : $\dfrac{k_n(x)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

Solution. Par caractérisation de la partie entière, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{n \ln x}{\ln 2} - 1 < k_n(x) \leqslant \frac{n \ln x}{\ln 2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{1}{n} < \frac{k_n(x)}{n} \leqslant \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Le terme de droite $\frac{\ln x}{\ln 2}$ est constant et le terme de gauche tend vers $\frac{\ln x}{\ln 2}$ aussi lorsque $n \to +\infty$. La suite $(\frac{k_n(x)}{n})_{n \geqslant 1}$ converge donc vers $\frac{\ln x}{\ln 2}$ par théorème d'encadrement.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 2^{k_n(x)} \leqslant x^n < 2^{k_n(x)+1}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par caractérisation de la partie entière :

$$k_n(x) \leqslant \frac{n \ln x}{\ln 2} < k_n(x) + 1, \quad \text{d'où} \quad k_n(x) \ln 2 \leqslant n \ln x < (k_n(x) + 1) \ln 2.$$

On obtient alors l'encadrement demandé par stricte croissante de l'exponentielle.

(c) À l'aide des résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k_n(x)}{n} \leqslant \frac{\ln f(x)}{\ln f(2)} < \frac{k_n(x) + 1}{n}.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que la fonction f est strictement croissante. L'encadrement de la question précédente entraîne donc :

$$f(2^{k_n(x)}) \leqslant f(x^n) < f(2^{k_n(x)+1})$$

c'est-à-dire, compte tenu de la question **Q.13**,

$$f(2)^{k_n(x)} \leqslant f(x)^n < f(2)^{k_n(x)+1}.$$

On conclut alors par stricte croissance de ln, puis division par $n \ln f(2)$.

Q.12 En déduire qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^\alpha$.

Solution. D'après le calcul de limite de $(\frac{k_n(x)}{n})_{n \geqslant 1}$, on déduit de la question précédente que :

$$\frac{\ln f(x)}{\ln f(2)} = \frac{\ln x}{\ln 2},$$

ceci quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$. On obtient donc, en posant $\boxed{\alpha = \frac{\ln f(2)}{\ln 2}}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln f(x) = \alpha \ln x, \quad \text{i.e.} \quad f(x) = x^\alpha.$$

Il reste à justifier que $\alpha \geqslant 1$, ce qui découle de la croissance de ln et du fait que $f(2) \geqslant 2$. En effet, $f(2) \geqslant f(1) + f(1)$ d'après la propriété **SA** et $f(1) = 1$.

Q.13 Conclusion. Quel est l'ensemble des solutions du problème ?

Solution.

- Les parties **B** et **C** ont établi que tout solution non constante est nécessairement une fonction f_α pour une certaine constante $\alpha \geqslant 1$.
- Réciproquement, la partie **A** a établi que ces fonctions sont bien des solutions.

L'ensemble des solutions du problème est constitué, d'une part, de toutes les fonctions f_α avec $\alpha \in [1, +\infty[$ et, d'autre part, de la fonction nulle.