Devoir d'entraînement pour le DS 4

Solutions

Exercice I.

Soit a un réel positif.

▶ **1.** Déterminer, en fonction de a, les primitives de $x \mapsto \dfrac{x^2 - 2ax + 1}{x^2 + 2ax + 1}$ sur $[0, +\infty[$.

Solution.

$$f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2 + 2ax + 1} = 1 - \frac{2(2x + 2a)}{x^2 + 2ax + 1} + \frac{4a}{(x^2 + a)^2 + 1 - a^2} = 1 - \frac{2(2x + 2a)}{x^2 + 2ax + 1}$$

▶ **2.** En déduire, selon les cas, la valeur de $L(a) = \lim\limits_{X \to +\infty} \displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{ch}(x) - a}{\mathrm{ch}(x) + a}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$.

Exercice II.

▶ **3.** On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

– **a)** Dresser le tableau de variation de f, en précisant le calcul des limites.

– **b)** Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) - x$.

▶ **4.** Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$.

– **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [-1, 1]$.

– **b)** Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Problème

Le but du problème est la résolution de l'équation différentielle suivante

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2 \, \ln(x), \qquad \text{sur }]0,+\infty[. \tag{E}$$

Partie A. Prémilinaires

▶ **5.** Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \qquad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

▶ **6.** En déduire les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ sur $]0,+\infty[$.

▶ **7.** Déterminer une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0,+\infty[$.

▶ **8.** Déterminer une primitive de $x \mapsto (1-x^2)\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

Partie B. Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse d'abord à l'équation homogène associée à (E) :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad \text{sur }]0,+\infty[\qquad . \tag{H}$$

▶ **9.** Déterminer $\alpha > 0$ tel que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (H).

▶ **10.** Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{x} f(x)$ définie de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

– **a)** Vérifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

– **b)** Montrer que f est solution de (H) si, et seulement si, g' est solution de l'équation suivante :

$$y' + \frac{2}{x(x^2+1)} y = 0, \qquad \text{sur }]0,+\infty[\qquad . \tag{H'}$$

▶ **11.** Résoudre l'équation différentielle (H').

▶ **12.** En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_H$ de toutes les solutions de l'équation (H).

Partie C. Résolution de l'équation

Notons $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).

▶ **13.** En supposant qu'on dispose d'une solution f_0 de (E), montrer que :

$$\mathcal{S}_E = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}.$$

▶ **14.** Soient λ, μ deux fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad x\lambda'(x) + (x^2 - 1)\mu'(x) = 0. \tag{1}$$

– **a)** Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\lambda(x) + (x^2 - 1)\mu(x)$ est dérivable et exprimer f' à l'aide de λ et μ.

– **b)** En déduire que f est deux fois dérivable et exprimer f'' à l'aide de λ', μ et μ'.

– **c)** Montrer que f est une solution de (E) si, et seulement si,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2) \ln x. \tag{2}$$

– **d)** Soit $x > 0$. Calculer $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en considérant le système linéaire formé par les équations (1) et (2).

– **e)** En déduire les expressions des fonctions λ et μ.

▶ **15.** Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_E$ de toutes les solutions de (E).