Cinquième devoir en temps libre

Solutions

I Puissances d'une matrice

Q.1 On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer deux réels λ, μ tels que $A^3 = \lambda A^2 + \mu A$.

Solution. Par produits matriciels successifs :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut poser $\lambda = 1$ et $\mu = 2$. En effet,

$$A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^3.$$

Q.2 On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ les deux suites définies par $u_1 = 0$, $v_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n, \\ v_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$$

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = u_n\, A^2 + v_n\, A$.

Solution. L'égalité $A^1 = 0\, A^2 + 1\, A$ est vraie Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = u_n\, A^2 + v_n\, A$. Alors

$$A^{n+1} = (u_n\, A^2 + v_n\, A)A = (u_n + v_n)\, A^2 + 2u_n\, A.$$

d'où $A^{n+1} = u_{n+1}\,A^2 + v_{n+1}\,A$. On conclut par récurrence.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.
En déduire une expression explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ sont 2 et -1.
Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \lambda 2^n + \mu(-1)^n$.
Conditions initiales pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ 4\lambda + \mu = 1 \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} 2\lambda & -\mu & = 0 \\ & 3\mu & = 1 \end{array} \right. \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{6} \\ \mu = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{u_n = \frac{2^n}{6} + \frac{(-1)^n}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{2^n}{6} - \frac{2(-1)^n}{3}}.$$

II Suite implicite

À tout entier $n \geqslant 1$, on associe la fonction $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

Q.3 Étudier les variations de φ_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. La fonction φ_n est polynomiale, donc dérivable en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ par combinaison linéaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_n(x) = nx^{n-1} + \cdots + 2x + 1 > 0.$$

Donc φ_n est strictement croissante sur cet intervalle.

Q.4 Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $\varphi_n(x_n) = 0$.

Solution. La fonction φ_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans l'intervalle

$$\left]\lim_{x\to 0}\varphi_n(x),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi_n(x)\right[=]-1,+\infty[$$

Puisque $0 \in]-1,+\infty[$, il existe une unique solution par bijectivité : $x_n = \varphi_n^{-1}(0)$.

Q.5 Quel est le signe de $\varphi_{n+1}(x_n)$? En déduire la stricte monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout x réel, $\varphi_{n+1}(x) = x^{n+1} + \varphi_n(x)$. Donc en particulier :

$$\boxed{\varphi_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} > 0},$$

car $\varphi_n(x_n) = 0$. La fonction φ_{n+1} est croissante et $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, donc nécessairement $x_n > x_{n+1}$. Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

Q.6 Montrer que (x_n) est convergente et que $x_n^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution. La suite (x_n) est à valeurs positives, donc minorée (par 0). Elle décroît donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

En outre, $x_1 = 1$ car c'est l'unique solution de l'équation $\varphi_1(x) = 0$. Par strictement décroissance, il vient alors $x_2 < 1$ et $x_n < x_2$ pour tout $n \geqslant 2$, d'où :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < x_n^n < x_2^n.$$

À droite, $x_2^n \to 0$ car $|x_2| = x_2 < 1$. Donc $\boxed{x_n^n \to 0}$ par théorème d'encadrement.

Q.7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Solution. Par somme d'une progression géométrique, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1 = \frac{x(x^n-1)}{x-1} - 1 = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x-1}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Puisque $\varphi_n(x_n) = 0$ et $x_n < 2$, il vient : $\boxed{x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0}$.
Autrement dit, $x_n = \frac{1}{2}(x_n^{n+1} + 1)$. Mais $x_n^{n+1} = x_n^n \times x_n \to 0$ car (x_n) est bornée et

$x_n^n \to 0$. On obtient finalement par opérations : $\boxed{x_n \to \frac{1}{2}}$.

III Problème – Jolie limite

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

Le but du problème est de démontrer que cette suite est convergente, puis de calculer explicitement la valeur de la limite. Les deux parties sont néanmoins indépendantes.

A. Des suites et des intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \ln\left(\frac{1}{a_n}\right) \quad \text{et} \quad c_n = b_n + \frac{1}{2n}.$$

Q.8 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \int_1^n \ln(x)\, dx - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln(n) - 1.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les règle de calcul de ln, on obtient d'une part :

$$\begin{aligned} b_n &= \ln(n^n) + \ln(\sqrt{n}) - \ln(n!) - \ln(e^n) \\ &= n\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(n) - \ln(n!) - n. \end{aligned}$$

D'autre part, une primitive usuelle de ln donne directement :

$$\int_1^n \ln(x)\, dx = [x\ln x - x]_1^n = n\ln n - n + 1,$$

ce qui permet de conclure.

Q.9 *Relations utiles.* Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que :

$$b_{n+1} - b_n = \int_0^1 \ln(t+n)\,dt - \frac{\ln(n+1)+\ln(n)}{2}.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule précédente au rang $n+1$ donne :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx - \ln((n+1)!) + \frac{1}{2}\ln(n+1) - 1 \\ &= \int_1^{n} \ln(x)\,dx + \int_n^{n+1} \ln(x)\,dx - \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - 1, \end{aligned}$$

et il vient donc par différence :

$$b_{n+1} - b_n = \int_n^{n+1} \ln(x)\,dx - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n).$$

On conclut en effectuant le changement de variable $x = t+n$ dans l'intégrale.

(b) En intégrant par parties, en déduire les égalités :

$$b_{n+1} - b_n \;=\; -\int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+n)^2}\,dt.$$

Solution. On intègre par parties en considérant les fonctions $u : t \mapsto t - \frac{1}{2}$ et $v : t \mapsto \ln(t+n)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(t+n)\,dt = \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt \\ &= \left[(t-\tfrac{1}{2})\ln(t+n)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+n) + \frac{1}{2}\ln(n) - \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt, \end{aligned}$$

d'où la première égalité. Pour la seconde, on intègre par parties à nouveau :

$$-\int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\,dt = -\left[\frac{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}}{t+n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}}{(t+n)^2}\,dt.$$

On conclut en observant que le crochet s'annule, tandis que $\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}t(1-t)$.

(c) Établir finalement l'encadrement :

$$0 \leqslant b_{n+1} - b_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Solution. Pour tout réel $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t(1-t) \leqslant 1$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{0}{(t+n)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+n)^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t+n)^2}\,dt.$$

Le membre de gauche est nul et celui du milieu est $b_{n+1} - b_n$. À droite enfin,

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+n)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{t+n}\right]_0^1 = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

Q.10 *Convergence.*

(a) Démontrer la monotonie et la convergence des suites (b_n) et (c_n).

Solution. La partie gauche de l'encadrement ci-dessus montre que $b_{n+1} - b_n$ est positif quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante.

Pour la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ on calcule de même :

$$c_{n+1} - c_n = b_{n+1} - b_n - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right),$$

ce qui est négatif d'après la partie droite de l'encadrement. La suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante. Pour montrer que (b_n) et (c_n) convergent, il suffit alors de remarquer qu'elle sont en fait adjacentes. En effet, la monotonie est prouvée et, de plus,

$$|b_n - c_n| = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Prouver finalement que la suite (a_n) converge vers un certain réel $C > 0$.

Solution. La suite (b_n) admet pour limite un certain réel ℓ. Mais alors :

$$a_n = e^{-b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\ell}$$

par continuité de l'exponentielle. D'où le résultat en posant $C = e^{-\ell}$.

B. Calcul de la limite

Dans cette partie, on suppose connu le fait que (a_n) converge vers un réel $C > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \, dx$.

Q.11 Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\cos|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ est à valeurs dans $[0, 1]$ donc :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad \cos(x)^n \geqslant \cos(x)^{n+1}.$$

Par croissance de l'intégration, on en déduit que $W_n \geqslant W_{n+1}$.

Q.12 À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. En primitivant $x \mapsto \cos(x)$ et dérivant $x \mapsto \cos(x)^{n+2}$, la formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+1} \cos(x) \, dx \\
&= \left[\cos(x)^{n+1} \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \sin(x) \sin(x) \, dx \\
&= 0 - 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n (1 - \cos(x)^2) \, dx \\
&= (n+1) \left(W_n - W_{n+2}\right).
\end{aligned}$$

Ceci se traduit par $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où la conclusion.

Q.13 *Encadrement.*

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad W_{n+1} W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

Solution. La relation de récurrence démontrée ci-dessus donne pour tout entier n,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

La suite $\big((n+1)W_{n+1}W_n\big)$ est donc constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0.$$

Pour conclure, il reste à calculer $W_1 W_0$:

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant W_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (W_n) est décroissante et à valeurs positives. D'après la question précédente aux rang n et $n-1$, il vient :

$$\frac{\pi}{2(n+1)} = W_{n+1}W_n \ \leqslant\ W_n^2 \ \leqslant\ W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

L'encadrement s'ensuit par croissance de la fonction racine carrée.

(c) Démontrer alors que la suite $(\sqrt{n}\,W_n)$ est convergente. Donner sa limite.

Solution. Remarquons que, pour $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\frac{1}{n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, la suite $(\sqrt{n}\,W_n)$ est donc convergente et sa limite est $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Q.14 *Conclusion.*

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad W_{2n} = \dfrac{a_{2n}}{(a_n)^2} \times \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

Solution. Commençons par simplifier : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a_{2n}}{(a_n)^2} \times \frac{\pi}{\sqrt{2n}} = \frac{(2n)!\, e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}} \times \frac{(n^n\sqrt{n})^2}{(n!\, e^n)^2} \times \frac{\pi}{\sqrt{2n}} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

On raisonne alors par récurrence :

- Pour $n = 1$, on a bien $W_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{(2!)}{4(1!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'égalité est vraie au rang n. Alors,

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

  On retombe bien sur la formule voulue au rang $n+1$ en écrivant :

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}.$$

(b) Déterminer finalement la valeur de C.

Solution. On sait que $a_n \to C$ pour un certain réel $C > 0$, et $a_{2n} \to C$ aussi par extraction. D'après la question précédente, on a donc :

$$\sqrt{2n}\, W_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{C\pi}{C^2} = \frac{\pi}{C}.$$

Or $(\sqrt{2n}\, W_{2n})_{n \geqslant 1}$ est aussi une suite extraite de $(\sqrt{n}\, W_n)_{n\geqslant 1}$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\, W_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Conclusion. Par unicité de la limite,

$$\frac{\pi}{C} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{d'où} \quad C = \boxed{\sqrt{2\pi}}.$$

IV Problème de calcul matriciel

A. Puissances et inverses

Q.15 On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer l'unique matrice $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 4J - 3I$.

(b) Vérifier que $J^2 = J$. En déduire J^n pour tout $n \geqslant 3$.

Solution. On obtient par calcul :

$$J = \frac{1}{4}(A + 3I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence immédiate, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = J$. De plus $J^0 = I$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer alors A^n comme combinaison linéaire de I et J.

Solution. La définition de J donne la relation $A = 4J - 3I$. La matrice scalaire $(-3I)$ commute avec toute matrice, donc en particulier avec $4J$. Par formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(4J - 3I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I)^{n-k} \\ &= (-3)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J \\ &= (-3)^n I + \left((4-3)^n - (-3)^n\right) J,\end{aligned}$$

d'où finalement $\boxed{A^n = (-3)^n I + (1 - (-3)^n) J}$.

(d) La matrice J est-elle inversible ?

Solution. Supposons que J soit inversible. Sachant que $J^2 = J$, il vient alors $J = J^{-1}J = I$. Comme $J \neq I$, on en déduit que J par contraposition.

Autre solution. On remarque que la troisième ligne est l'opposée de la première.

Q.16 **(a)** Déterminer une relation entre les matrices AP et PD.

Solution. En posant les produits matriciels,

$$AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad PD = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc finalement $AP = PD$.

(b) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

Solution. On applique la méthode de Gauss-Jordan et on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Solution.

- Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$ d'où l'égalité.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

  $$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A.$$

  La relation $AP = PD$ donne par ailleurs :

  $$P^{-1}A = P^{-1}APP^{-1} = P^{-1}PDP^{-1} = DP^{-1},$$

  d'où finalement $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
- On conclut par principe de récurrence.

Q.17 Prouver, *sans calcul*, que A est inversible. Exprimer son inverse A^{-1}.

Solution. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible. Puisque P et P^{-1} sont aussi inversible, la matrice $A = PDP^{-1}$ est donc inversible par produit dans $GL_3(\mathbb{R})$.

B. Généralités sur le commutant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donnée une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{C}(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\mathscr{C}(B) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$

Q.18 Donner deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui appartiennent toujours à $\mathscr{C}(B)$.

> **Solution.** Les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices. La matrice nulle et la matrice identité appartiennent donc en particulier à $\mathscr{C}(B)$.

Q.19 *Opérations.* Soient M, N des éléments de $\mathscr{C}(B)$ et λ, μ des réels.

(a) Montrer que $\lambda M + \mu N$ est un élément de $\mathscr{C}(B)$.

> **Solution.** Les matrices $B(\lambda M + \mu N) = \lambda BM + \mu BN$ et $(\lambda M + \mu N)B = \lambda MB + \mu NB$ sont égales car $BM = MB$ et $BN = NB$.

(b) Montrer que MN est un élément de $\mathscr{C}(B)$.

> **Solution.** Par associativité,
>
> $$B(MN) = BMN = MBN = MNB = (MN)B.$$

Q.20 *Inverse.* Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathscr{C}(B) \iff M^{-1} \in \mathscr{C}(B)$.

> **Solution.** Supposons que $M \in \mathscr{C}(B)$. En multipliant à gauche et à droite la relation $BM = BM$ par M^{-1}, il vient $M^{-1}B = BM^{-1}$ et donc $M^{-1} \in \mathscr{C}(B)$. Réciproquement, si $M^{-1} \in \mathscr{C}(B)$, alors $(M^{-1})^{-1}$ ausi et donc $M \in \mathscr{C}(B)$.

C. Exemples de commutant

Q.21 On revient maintenant aux matrices A, P, D définies en première partie ($n = 3$).

(a) Montrer que les éléments de $\mathscr{C}(D)$ sont exactement les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, \qquad \text{où } a, b, c, d, e \text{ sont des réels.}$$

Solution. Soient $(a,b,c,d,e,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^3$ des réels. Alors :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{C}(D) \iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & b & c \\ -3d & e & f \\ -3g & h & i \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à $b = 0,\ c = 0,\ d = 0,\ g = 0.$

(b) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathscr{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D)$.

Solution. On rappelle que $A = PDP^{-1}$. Donc :

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \end{aligned}$$

Autrement dit : $M \in \mathscr{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D)$.

(c) En déduire cinq matrices $M_1, M_2, \ldots, M_5$ telles que :

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 + eM_5 \mid (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

Solution. D'après les deux questions précédentes, une matrice M appartient à $\mathscr{C}(A)$ ssi $P^{-1}MP$ est combinaison linéaire des cinq matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $(i,j) \in \{(1,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (3,3)\}$. Le commutant $\mathscr{C}(A)$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des cinq matrices :

$$M_1 = PE_{1,1}P^{-1},\ M_2 = PE_{2,2}P^{-1},\ M_3 = PE_{2,3}P^{-1},$$
$$M_4 = PE_{3,2}P^{-1},\ M_5 = PE_{3,3}P^{-1}.$$

Q.22 Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *diagonale*, dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont *deux à deux distincts*.

(a) Étant donnée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, quelles opérations élémentaires permettent d'obtenir la matrice BM ? et la matrice MB ?

Solution. La matrice B est le produit des matrices de dilatation $D_i(\lambda_i)$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Multiplier à gauche par B consiste donc à effectuer les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda_i L_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Multiplier à droite par B consiste à effectuer les opérations élémentaires $C_i \leftarrow \lambda_i C_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer les coefficients de BM et MB en fonction des $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et des coefficients $(m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de la matrice M.

Solution. D'après la question précédente, $[BM]_{i,j} = \lambda_i m_{i,j}$ et $[MB]_{i,j} = \lambda_j m_{i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. On peut aussi poser le calcul :

$$[BM]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} M_{k,j} = \lambda_i m_{i,j}.$$

(c) En déduire que $\mathscr{C}(B)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

Solution. L'ensemble des matrices diagonales est inclus dans $\mathscr{C}(B)$ car, pour tout $\mu_1, \ldots, \mu_n$ réels,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \mathscr{C}(B)$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, l'égalité $BM = MB$ implique $\lambda_i m_{i,j} = \lambda_j m_{i,j}$, donc $\lambda_i = \lambda_j$ ou $m_{i,j} = 0$. Comme les (λ_i) sont supposés distincts deux à deux, on en déduit que $m_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. La matrice M est donc diagonale.