Cinquième devoir en temps libre

à rendre vendredi 19 janvier

I Puissances d'une matrice

Q.1 On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer deux réels λ, μ tels que $A^3 = \lambda A^2 + \mu A$.

Q.2 On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ les deux suites définies par $u_1 = 0$, $v_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n, \\ v_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$$

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = u_n\, A^2 + v_n\, A$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.
En déduire une expression explicite des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

II Suite implicite

À tout entier $n \geqslant 1$, on associe la fonction $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

Q.3 Étudier les variations de φ_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q.4 Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $\varphi_n(x_n) = 0$.

Q.5 Quel est le signe de $\varphi_{n+1}(x_n)$? En déduire la stricte monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q.6 Montrer que (x_n) est convergente et que $x_n^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Q.7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

III Problème – Jolie limite

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

Le but du problème est de démontrer que cette suite est convergente, puis de calculer explicitement la valeur de la limite. Les deux parties sont néanmoins indépendantes.

A. Des suites et des intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = \ln\left(\frac{1}{a_n}\right) \quad \text{et} \quad c_n = b_n + \frac{1}{2n}.$$

Q.8 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \int_1^n \ln(x)\, dx - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln(n) - 1.$$

Q.9 *Relations utiles.* Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que :

$$b_{n+1} - b_n = \int_0^1 \ln(t+n)\, dt - \frac{\ln(n+1)+\ln(n)}{2}.$$

(b) En intégrant par parties, en déduire les égalités :

$$b_{n+1} - b_n \;=\; -\int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+n}\, dt \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+n)^2}\, dt.$$

(c) Établir finalement l'encadrement :

$$0 \leqslant b_{n+1} - b_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Q.10 *Convergence.*

(a) Démontrer la monotonie et la convergence des suites (b_n) et (c_n).

(b) Prouver finalement que la suite (a_n) converge vers un certain réel $C > 0$.

B. Calcul de la limite

Dans cette partie, on suppose connu le fait que (a_n) converge vers un réel $C > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \, dx$.

Q.11 Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

Q.12 À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Q.13 *Encadrement.*

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad W_{n+1} W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant W_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(c) Démontrer alors que la suite $(\sqrt{n}\, W_n)$ est convergente. Donner sa limite.

Q.14 *Conclusion.*

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad W_{2n} = \dfrac{a_{2n}}{(a_n)^2} \times \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

(b) Déterminer finalement la valeur de C.

IV Problème de calcul matriciel

A. Puissances et inverses

Q.15 On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer l'unique matrice $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 4J - 3I$.

(b) Vérifier que $J^2 = J$. En déduire J^n pour tout $n \geqslant 3$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer alors A^n comme combinaison linéaire de I et J.

(d) La matrice J est-elle inversible ?

Q.16 **(a)** Déterminer une relation entre les matrices AP et PD.

(b) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Q.17 Prouver, *sans calcul*, que A est inversible. Exprimer son inverse A^{-1}.

B. Généralités sur le commutant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donnée une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{C}(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit :

$$\mathscr{C}(B) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$

Q.18 Donner deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui appartiennent toujours à $\mathscr{C}(B)$.

Q.19 *Opérations.* Soient M, N des éléments de $\mathscr{C}(B)$ et λ, μ des réels.

(a) Montrer que $\lambda M + \mu N$ est un élément de $\mathscr{C}(B)$.

(b) Montrer que MN est un élément de $\mathscr{C}(B)$.

Q.20 *Inverse.* Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathscr{C}(B) \iff M^{-1} \in \mathscr{C}(B)$.

C. Exemples de commutant

Q.21 On revient maintenant aux matrices A, P, D définies en première partie ($n = 3$).

(a) Montrer que les éléments de $\mathscr{C}(D)$ sont exactement les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, \qquad \text{où } a, b, c, d, e \text{ sont des réels.}$$

(b) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que : $M \in \mathscr{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D)$.

(c) En déduire cinq matrices $M_1, M_2, \ldots, M_5$ telles que :

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 + eM_5 \mid (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

Q.22 Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *diagonale*, dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont *deux à deux distincts*.

(a) Étant donnée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, quelles opérations élémentaires permettent d'obtenir la matrice BM ? et la matrice MB ?

(b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer les coefficients de BM et MB en fonction des $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et des coefficients $(m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de la matrice M.

(c) En déduire que $\mathscr{C}(B)$ est l'ensemble des matrices diagonales.