Devoir d'entraînement
Limites et continuité

Solutions

I Un max de fonctions (TD 15.17)

Q.1 Montrer que la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

> **Solution.** Montrons que $|a|$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.
>
> Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la deuxième inégalité triangulaire donne
>
> $$\big||x| - |a|\big| \leqslant |x - a|.$$
>
> Or $|x - a| \to 0$ lorsque $x \to a$, donc $|x| \to |a|$ par encadrement.

Q.2 Déterminer des réels (α, β, γ) tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max\{x, y\} = \alpha x + \beta y + \gamma |x - y|.$$

> **Solution.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $|x - y| = \max\{x - y,\ y - x\}$.
>
> Il vient alors, par disjonction de cas, $x + y + |x - y| = 2 \max\{x, y\}$.
>
> On conclut donc en posant $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$.

Q.3 Soient I un intervalle et f, g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ est continue.

> **Solution.** D'après la question précédente,
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|.$$
>
> Les fonctions $x \mapsto f(x) - g(x)$ et $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ sont continues par combinaison

linéaire de fonctions continues, puis composition avec la valeur absolue (qui est continue aussi d'après la première question). Finalement, h est donc continue par combinaison linéaire de fonctions continues.

II Fonctions à valeurs entières (TD 15.20)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

Q.4 Soient α, β des réels tels que $\alpha < \beta$. Montrer que le segment $[\alpha, \beta]$ contient au moins un élément qui n'est pas entier.

Solution. Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ou $\beta \notin \mathbb{Z}$, le résultat est immédiat. Supposons donc que $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas $\alpha < \beta$ entraîne que $\alpha + 1 \leqslant \beta$. Mais alors, $\alpha + \frac{1}{2} \in [\alpha, \beta] \setminus \mathbb{Z}$.

Q.5 En déduire que si $f(I) \subset \mathbb{Z}$, alors f est une fonction constante.

Solution. Montrons la contraposée, en supposant que f n'est pas constante. Il existe alors a, b deux éléments de I tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. La fonction $f|_{[a,b]}$ est continue sur un segment donc l'image directe $f([a, b])$ est un certain segment $[\alpha, \beta]$ tel que $\alpha < \beta$. D'après la question précédente, $[\alpha, \beta]$ contient au moins un élément non entier. Or $[\alpha, \beta] \subset f(I)$, donc $f(I)$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Z}$.

Q.6 Soient u, v des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^*$ telles que : $\forall x \in I,\ |u(x)| = |v(x)|$. Montrer que $u = v$ ou $u = -v$.

Solution. Posons $f = u/v$. Cette fonction est bien définie car v ne s'annule pas, et elle est continue par quotient de fonction continues. De plus :

$$\forall x \in I, \quad \big|f(x)\big| = \frac{|u(x)|}{|v(x)|} = 1.$$

donc $f(I) \subset \{-1, 1\}$. On conclut alors avec la question précédente.

Remarque. Attention, en général, à ne pas confondre les propositions

$$\begin{aligned} A: &\quad \forall x \in I,\ \big(u(x) = v(x) \text{ ou } u(x) = -v(x)\big), \\ B: &\quad \big(\forall x \in I,\ u(x) = v(x)\big) \text{ ou } \big(\forall x \in I,\ u(x) = -v(x)\big). \end{aligned}$$

Par exemple, les fonctions $u : x \mapsto |x|$ et $v : x \mapsto x$, vérifient A et non(B).

III Bijection et limite (TD 15.24)

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

Q.7 Montrer que f est une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. On peut appliquer le théorème de la bijection car :

- La fonction f est continue et strictement décroissante, par somme de fonctions continues et strictement décroissantes.
- L'ensemble $]0,1[$ est un intervalle.

La fonction f réalise donc une bijection de $]0,1[$ dans $f\big(]0,1[\big)$. De plus $f\big(]0,1[\big)$ est un intervalle ouvert, dont les bornes sont :

$$\sup f\big(]0,1[\big) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \inf f\big(]0,1[\big) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Finalement $f\big(]0,1[\big) =]-\infty,+\infty[$, d'où la conclusion attendue.

Q.8 Étudier la limite de $f^{-1}(\dfrac{1}{2^n})$ lorsque $n \to +\infty$.

Solution. D'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0,1[$ est continue aussi. La caractérisation séquentielle avec $\frac{1}{2^n} \to 0$ donne alors :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^{-1}(0).$$

Pour déterminer $f^{-1}(0)$, on résout l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in]0,1[$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \iff (x-1) + x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

En conclusion,

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}.$$

IV Enveloppe supérieure (TD 15.26)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$g(x) = \max\{f(t) \mid t \in [0,x]\}.$$

Q.9 Montrer que ceci définit bien une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $f|_{[0,x]}$ est continue sur un segment donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, le maximum est bien défini.

Q.10 Montrer que la fonction g est croissante.

Solution. Soient x_1, x_2 deux réels positifs tels que $x_1 \leqslant x_2$.
Alors $[0, x_1] \subset [0, x_2]$, donc : $\forall t \in [0, x_1],\ f(t) \leqslant g(x_2)$.
Donc $g(x_2)$ est un majorant de $f([0, x_1])$. Par définition d'une borne supérieure :

$$\sup f([0, x_1]) \leqslant g(x_2), \quad \text{i.e.} \quad g(x_1) \leqslant g(x_2).$$

Q.11 Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(a) > f(a)$. Montrer que g est constante au voisinage de a.

Solution. Posons $\epsilon = \frac{1}{2}(g(a) - f(a))$. Alors $\epsilon > 0$, donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon.$$

En particulier, $f \leqslant f(a) + \epsilon < g(a)$ sur $[a - \delta, a + \delta]$. On en déduit :

- $g(a) = f(x_0)$ pour un certain $x_0 \in [0, a]$ tel que $x_0 < a - \delta$.
- En particulier, par croissance : $\forall x \in [a - \delta, a + \delta],\ f(x_0) \leqslant g(x_0) \leqslant g(x)$.
- $f \leqslant g(a)$ sur $[0, a]$ et sur $[a, a + \delta]$, donc : $\forall x \in [a - \delta, a + \delta],\ g(x) \leqslant g(a)$.

Donc finalement, par transitivité : $\forall x \in [a - \delta, a + \delta],\ f(x_0) \leqslant g(x) \leqslant g(a)$.
Puisque $f(x_0) = g(a)$, la fonction g est donc constante sur $[a - \delta, a + \delta]$.

Q.12 Montrer que la fonction g est continue en tout $a \in \mathbb{R}_+$.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Remarquons déjà que $g(a) \geqslant f(a)$ par définition de g.
Si $g(a) > f(a)$, la fonction g est continue en a, car constante au voisinage.
Supposons que $g(a) = f(a)$ et montons la continuité de g. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f, on dispose de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$:

- $f(x) \geqslant f(a) - \epsilon$, d'où $g(x) \geqslant f(a) - \epsilon$ car $g(x) \geqslant f(x)$;
- $f(x) \leqslant f(a) + \epsilon$, d'où $g(x) \leqslant g(a + \delta) \leqslant f(a) + \epsilon$.

Puisque $f(a) = g(a)$, on en déduit la continuité :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |x - a| \leqslant \delta \implies |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon.$$

V Fonctions additives (TD 15.18 et 15.27)

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

V.A Généralités

Soit f une solution quelconque.

Q.13 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n\, f(x)$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx + x) = f(nx) + f(x)$.
La suite $\big(f(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique, de raison $f(x)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = f(0) + n\, f(x).$$

De plus $f(0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.

Q.14 Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$.

Solution. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. En posant $n = q$ et $x = \frac{1}{q}$,

$$f(1) = q\, f(\tfrac{1}{q}) \quad \text{d'où} \quad f(\tfrac{1}{q}) = \tfrac{1}{q}\, f(1).$$

En prenant maintenant $n = p$ et $x = \frac{1}{q}$, on obtient alors

$$f(\tfrac{p}{q}) = p\, f(\tfrac{1}{q}) = \tfrac{p}{q}\, f(1).$$

V.B Solutions continues

Q.15 Montrer que les solutions continues sont les fonctions $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit f une solution continue. Posons $a = f(1)$. D'après la question précédente, on sait déjà que :

$$\forall x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+, \quad f(x) = a\,x.$$

Ceci s'étend directement à tout $x \in \mathbb{Q}$ en remarquant que :

$$f(x + (-x)) = f(0) \implies f(x) + f(-x) = 0 \implies f(-x) = -f(x).$$

Soit maintenant x un réel quelconque. Par approximation décimale, on dispose d'une suite de rationnels (r_n) telle que $r_n \to x$. Mais alors, par continuité de f,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a\,r_n = a\,x.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction linéaire $x \mapsto ax$ est une solution continue.

V.C Solutions discontinues

Soit maintenant f une solution qui n'est pas continue.

Q.16 Montrer que f n'est pas continue en 0.

Solution. Raisonnons par contraposée ; supposons que f est continue en 0 et montrons que f est alors continue en tout $a \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x-a) + f(a).$$

Lorsque $x \to a$, on sait que $x - a \to 0$ et donc $f(x-a) \to f(0) = 0$ par continuité en 0 et composition de limite. Par somme de limites, $f(x) \to f(a)$, d'où la conclusion.

Q.17 En déduire que f n'est pas bornée au voisinage de 0.

Solution. Raisonnons par contraposée ; supposons que f est bornée au voisinage de 0 et montrons que f est alors continue en 0.

Par hypothèse, on dispose de $\delta > 0$ et $K \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall x \in [-\delta, \delta],\ |f(x)| \leqslant K$.

Pour tout réel $x \in [-\delta, \delta]$ non nul, posons alors $n(x) := \lfloor \delta/|x| \rfloor$. C'est un entier non nul car $\delta/|x| \geqslant 1$. De plus $n(x) \leqslant \delta/|x|$, donc $n(x)\,x \in [-\delta, \delta]$. D'après la première partie, $n(x)\,|f(x)| \leqslant K$, d'où $|f(x)| \leqslant K/n(x)$. Mais par ailleurs $n(x) > \delta/|x| - 1$, donc $n(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0$. Donc, par encadrement, $f(x) \to 0$.