Devoir d'entraînement
Limites et continuité

I Un max de fonctions (TD 15.17)

Q.1 Montrer que la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Q.2 Déterminer des réels (α, β, γ) tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max\{x, y\} = \alpha x + \beta y + \gamma |x - y|.$$

Q.3 Soient I un intervalle et f, g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ est continue.

II Fonctions à valeurs entières (TD 15.20)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

Q.4 Soient α, β des réels tels que $\alpha < \beta$. Montrer que le segment $[\alpha, \beta]$ contient au moins un élément qui n'est pas entier.

Q.5 En déduire que si $f(I) \subset \mathbb{Z}$, alors f est une fonction constante.

Q.6 Soient u, v des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^*$ telles que : $\forall x \in I,\ |u(x)| = |v(x)|$.
Montrer que $u = v$ ou $u = -v$.

III Bijection et limite (TD 15.24)

Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1}$.

Q.7 Montrer que f est une bijection de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

Q.8 Étudier la limite de $f^{-1}(\frac{1}{2^n})$ lorsque $n \to +\infty$.

IV Enveloppe supérieure (TD 15.26)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$g(x) = \max\{f(t) \mid t \in [0, x]\}.$$

Q.9 Montrer que ceci définit bien une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Q.10 Montrer que la fonction g est croissante.

Q.11 Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(a) > f(a)$. Montrer que g est constante au voisinage de a.

Q.12 Montrer que la fonction g est continue en tout $a \in \mathbb{R}_+$.

V Fonctions additives (TD 15.18 et 15.27)

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

V.A Généralités

Soit f une solution quelconque.

Q.13 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n\,f(x)$.

Q.14 Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$.

V.B Solutions continues

Q.15 Montrer que les solutions continues sont les fonctions $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.

V.C Solutions discontinues

Soit maintenant f une solution qui n'est pas continue.

Q.16 Montrer que f n'est pas continue en 0.

Q.17 En déduire que f n'est pas bornée au voisinage de 0.