Sujet d'entraînement (DS 6)

Solutions

I Exercice d'arithmétique

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.

Q.1 Montrer que $\mathrm{PGCD}(2^{8n} - 3^{2n} + 13,\ 2^{4n} - 3^n) = \mathrm{PGCD}(2^{4n} - 3^n,\ 13)$.

Solution. En posant $a = 2^{8n} - 3^{2n} + 13$ et $b = 2^{4n} - 3^n$,

$$a = b \times (2^{4n} + 3^n) + 13$$

par identité remarquable. Les couples (a, b) et $(b, 13)$ ont donc les mêmes diviseurs communs. En particulier, ils ont même PGCD.

Q.2 Montrer que 13 divise $2^{4n} - 3^n$.

Solution. On remarque que $13 = 2^4 - 3$ donc, par identité de Bernoulli,

$$2^{4n} - 3^n = (2^4 - 3) \sum_{k=0}^{n-1} (2^4)^{n-1-k} 3^k \in 13\mathbb{Z}.$$

Q.3 En déduire la valeur de $\mathrm{PGCD}(2^{8n} - 3^{2n} + 13,\ 2^{4n} - 3^n)$.

Solution. $\mathrm{PGCD}(2^{4n} - 3^n, 13) = 13$ car c'est un diviseur commun et c'est le plus grand possible. Donc $\mathrm{PGCD}(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n) = 13$.

II Exercice de polynôme

Q.4 Cours. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P.

(a) Quelle est la *définition* de la multiplicité m de α ?

> **Solution.** La multiplicité de α est le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\alpha)^m$ divise P.

(b) Donner la *caractérisation* de la multiplicité à l'aide des dérivées.

> **Solution.** La multiplicité de α est l'unique entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que
>
> $$P(\alpha)=0,\ P'(\alpha)=0,\dots,P^{(m-1)}(\alpha)=0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha)\neq 0.$$

Q.5 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P = X^4 - aX^3 + aX - 1$.

(a) Montrer que X^2-1 divise P.

> **Solution.** Par calcul immédiat (ou division euclidienne),
>
> $$\boxed{X = (X^2-1)(X^2-aX+1)}$$
>
> *Remarque.* On pouvait remarquer que $X^2-1=(X-1)(X+1)$ où les racines 1 et -1 sont aussi racines de P.

(b) Déterminer a tel que -1 est racine de P de multiplicité au moins 2.

Préciser alors la multiplicité exacte de -1.

> **Solution.** La multiplicité de -1 est au moins double ssi $P(-1)=0$ et $P'(-1)=0$, c'est-à-dire ssi $-4-3a+a=0$. L'unique solution est donc $\boxed{a=-2.}$ Pour cette valeur, $P^{(2)}(-1)=12-12=0$ et $P^{(3)}(-1)=-24+12\neq 0$. Donc -1 est racine de $\boxed{\text{multiplicité 3.}}$

(c) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

> **Solution.** $\boxed{P=(X-1)(X+1)^3}$

Q.6 On pose $Q = X^4+X^2+1$.

(a) Le polynôme Q admet-t-il des racines réelles ?

> **Solution.** Ce polynôme $\boxed{\text{n'a pas de racine réelle}}$ car :
>
> $$\forall a \in \mathbb{R}, \quad Q(a)=a^4+a^2+1 \geqslant 0+0+1.$$

(b) Le polynôme Q est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Solution. Les irréductibles de Q sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant Δ est strictement négatif. Donc $\boxed{Q \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{R}[X].}$

III Exercice de convexité

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement *négatives*.
Le but de l'exercice est d'étudier qualitativement les solutions de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$, à coefficients non constants, qu'on ne cherchera pas à résoudre.

Q.7 Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *convexe*. Montrer que la fonction φ est majorée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est constante.

Solution. Toute fonction constante est clairement majorée. Supposons maintenant que φ n'est pas constante et montrons qu'elle n'est pas majorée.
On dispose de réels a, b tels que $a < b$ et $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. En comparant à la sécante passant par les points d'abscisses a et b, on obtient par convexité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \quad \varphi(x) \geqslant \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a).$$

Si $\varphi(b) > \varphi(a)$, alors $\varphi(x) \to +\infty$ en $+\infty$ par comparaison. Si $\varphi(b) < \varphi(a)$, alors $\varphi(x) \to +\infty$ en $-\infty$. Dans tous les cas, φ n'est pas majorée.

Q.8 Soit f une solution de l'équation différentielle, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + q(x)f(x) = 0. \tag{E}$$

(a) Montrer que f^2 est une fonction convexe.

Solution. La fonction f^2 est deux fois dérivable par produit. On obtient successivement $(f^2)' = 2ff'$ puis $(f^2)'' = 2ff'' + 2f'^2$. Alors :

$$(f^2)'' = -2qf^2 + 2f'^2 \geqslant 0$$

car f est solution de (E) et $q < 0$. Donc $\boxed{f^2 \text{ est convexe.}}$

(b) En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, alors f est constante.

Solution. Supposons f bornée. Alors il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant K$. La fonction f^2 est donc majorée par K^2. Comme elle est convexe sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f^2 est constante d'après la première question. Alors $|f|$ est constante aussi par passage à la racine carrée. Si $|f|$ est nulle, alors f est nulle aussi. Sinon on dispose de $c > 0$ tel que $|f| = c$ sur $\mathbb{R}$. En particulier f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ par continuité d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Finalement, $\boxed{f = c \text{ sur } \mathbb{R} \text{ ou } f = -c \text{ sur } \mathbb{R}.}$

(c) Montrer que la fonction nulle est l'unique solution bornée de l'équation (E).

Solution. La fonction nulle est clairement une solution bornée. Réciproquement, soit f une solution bornée. D'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que f est la fonction constante $x \mapsto c$.

Mais alors f'' est nulle et donc l'équation (E) devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 + q(x) \times c = 0.$$

Nécessairement $c = 0$ car $q < 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{f \text{ est nulle.}}$

Q.9 Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

(a) En considérant sa tangente en 0, montrer que f^2 est minorée par 1.

Solution. Puisque $(f^2)'(0) = 2f(0)f'(0) = 0$ et $(f^2)(0) = 1$, la courbe de f^2 admet une tangente en 0 d'équation $y = 1$. Par convexité :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 \geqslant 1}$$

(b) En déduire que f est minorée par 1 et convexe.

Solution. Par croissance de la fonction racine carrée, il s'ensuit que $|f|$ est minorée par 1. En particulier, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et elle garde donc un signe constant par continuité (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires). Puisque $f(0) = 1$, la fonction f reste positive et donc $f \geqslant 1$. Comme f est solution de (E) et $q < 0$, on obtient alors :

$$f''(x) = -q(x)f(x) > 0,$$

ce qui montre que f est convexe.

(c) Dresser le tableau de variation de f. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution. La fonction f' est strictement croissante car $f'' > 0$. De plus $f'(0) = 0$, donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi,

- $\boxed{f \text{ croît strictement sur } \mathbb{R}_+}$ et $\boxed{f(x) \to +\infty \text{ en } +\infty}$ par comparaison à la tangente en 1 (rappelons que f est convexe) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant f'(1)(x-1) + f(1).$$

- $\boxed{f \text{ décroît strictement sur } \mathbb{R}_-}$ et $\boxed{f(x) \to +\infty \text{ en } -\infty}$ aussi par comparaison à la tangente en -1.

(d) On suppose ici qu'il existe un réel $a > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) \leqslant -a^2$.
Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x)/\mathrm{ch}(ax)$ et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant \mathrm{ch}(ax).$$

Solution. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient car $\mathrm{ch} > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{h(x)}{\mathrm{ch}(ax)^2} \qquad \text{où} \quad h(x) = f'(x)\,\mathrm{ch}(ax) - af(x)\,\mathrm{sh}(ax).$$

Par ailleurs, l'hypothèse $q \leqslant -a^2$ entraîne que :

$$h'(x) = f''(x)\,\mathrm{ch}(ax) - a^2 f(x)\,\mathrm{ch}(ax) \geqslant \underbrace{[f''(x) + q(x)f(x)]}_{=0}\,\mathrm{ch}(ax).$$

La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, g admet un minimum en 0 qui vaut $g(0) = 1$. Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)\,\mathrm{ch}(ax) \geqslant \mathrm{ch}(ax)}$$

IV Problème

Q.10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,dt = 0.$$

Solution.

- *Unicité.* Soients Q_1, Q_2 deux polynômes tels que $Q_1' = Q_2' = P$ et

$$\int_0^1 Q_1(t)\,dt = \int_0^1 Q_2(t)\,dt = 0.$$

  Alors $(Q_1 - Q_2)' = 0$ donc $Q_1 - Q_2$ est un polynôme constant : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Q_1 - Q_2 = c$ dans $\mathbb{R}[X]$. Mais alors

$$0 = \int_0^1 (Q_1(t) - Q_2(t))\,dt = c,$$

  ce qui donne finalement $Q_1 - Q_2 = 0$ dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire $Q_1 = Q_2$.

- *Existence.* Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ la forme développée de P.

  Cherchons une solution $Q \in \mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$\boxed{Q = c + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}}$$

  avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer. La condition $Q' = P$ est alors satisfaite et

$$\int_0^1 Q(t)\,dt = c + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \int_0^1 t^{k+1}\,dt = c + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}.$$

  On obtient donc une solution en posant :

$$\boxed{c = -\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}}$$

Notations. *Dans toute la suite du sujet, on considère l'unique suite de polynômes*

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n' = n\,B_{n-1} \quad \textit{et} \quad \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = B_n(0)$ le coefficient constant de B_n.

Q.11 Expliciter les polynômes B_n et les entiers b_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Solution. On les calcule de proche en proche.

- $B_0 = 1$ par définition et $b_0 = 1$;
- $B_1 = X + b_1$ où $b_1 = -\dfrac{1}{2}$.
- $B_2 = X^2 - X + b_2$ où $b_2 = -\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{6}$.
- $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + b_3$ où $b_3 = -\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = 0$.
- $B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + b_4$ où $b_4 = -\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{30}$.

Q.12 Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de B_n.

Solution.

- $B_0 = 1$ est de degré 0
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que B_n est de degré n. Alors B_{n+1} est un polynôme tel que $B_{n+1}' = (n+1)B_n$, donc B_{n+1} n'est pas un poylnôme constant et

$$\deg(B_{n+1}) = \deg(B_{n+1}') + 1 = n + 1.$$

- Par principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg(B_n) = n}$$

Q.13 Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

Solution.

- *Initialisation.* $B_0 = 1$ donc l'égalité est vraie au rang 0 car :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} b_{0-k} X^k = b_0 X^0 = 1.$$

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'égalité soit vraie au rang n.

  On sait que $B'_{n+1} = (n+1)B_n$, donc B_{n+1} est de la forme :

$$B_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b_{n-k}}{k+1} X^{k+1} + c$$

  où le coefficient constant est $c = B_{n+1}(0) = b_{n+1}$.

  Par ailleurs, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

  Après changement d'indice $j = k+1$, on obtient la formule au rang $n+1$:

$$\boxed{B_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} b_{n+1-j} X^j}$$

Q.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$.

Solution. La fonction polynomiale $x \mapsto B_{n+1}(x)$ est une primitive de $x \mapsto B'_{n+1}(x)$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt = (n+1)\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$$

pourvu que $n \geqslant 1$.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

Solution. L'identité précédente évaluée en 1 donne, au rang $n+1$,

$$B_{n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{(n+1)-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{(n+1)-k}$$

Puisque $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0) = b_{n+1}$, on en déduit que :

$$b_{n+1} = b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{(n+1)-k}.$$

La somme ci-dessus est donc nulle. En isolant le terme d'indice $k = 1$,

$$\binom{n+1}{1} b_n + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k}.$$

Donc finalement, après changement d'indice $j = n + 1 - k$,

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} b_j}$$

(c) Calculer b_5 et b_6.

Solution. D'après la formule établie ci-dessus :

- $b_5 = -\dfrac{1}{6}\left(b_0 + 6b_1 + 15b_2 + 20b_3 + 15b_4\right) = \boxed{0}$.
- $b_6 = -\dfrac{1}{7}\left(b_0 + 7b_1 + 21b_2 + 35b_3 + 35b_4 + 21b_5\right) = \boxed{\dfrac{1}{42}}$.

Q.15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = (-1)^n B_n(1 - X)$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = B_n$.

Solution. Pour $n = 0$, on a bien $C_0 = (-1)^0 1 = 1 = B_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $C_n = B_n$. Au rang $n + 1$, on a par définition :

$$C_{n+1}(X) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1 - X),$$

et $B'_{n+1} = (n + 1)B_n$ donc

$$C'_{n+1}(X) = (n + 1)(-1)^n B_n(1 - X) = (n + 1)C_n(X).$$

Par hypothèse de récurrence on a donc $C'_{n+1} = B_n$. De plus, par changement de variable $s = -t$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 C_{n+1}(t)\,dt &= (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-t)\,dt\\ &= (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(s)\,ds\\ &= 0.\end{aligned}$$

On a donc $C_{n+1} = B_{n+1}$ par unicité de B_{n+1}.

Par principe de récurrence, on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = B_n.}$

(b) Montrer que, pour tout $m \geqslant 3$ impair, les réels 0, 1 et $\frac{1}{2}$ sont racines de B_m.

Solution. Puisque m est impair, $C_m(X) = -B_m(1-X)$. Donc $B_m(X) = -B_m(1-X)$ d'après la question précédente. Donc $B_m(1) = -B_m(0)$ par évaluation en 1. Or $B_m(1) = B_m(0)$, donc finalement :

$$\boxed{b_m = B_m(0) = B_m(1) = 0}$$

Par évaluation en $\frac{1}{2}$, on trouve $B_m(\frac{1}{2}) = -B_m(\frac{1}{2})$ et donc :

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \text{ est racine de } B_m.}$$

Q.16 Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Exprimer $B_n^{(k)}$ en fonction de B_{n-k} pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Simplifier $B_n^{(n)}$.

Solution. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par définition de la suite (B_n), on obtient de proche en proche pour $i \in [\![0, k-1]\!]$,

$$B_n^{(k)} = nB_{n-1}^{(k-1)} = n(n-1)\cdots(n-i)B_{n-i-1}^{k-i-1}$$

D'où en particulier,

$$\boxed{B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}}, \qquad \boxed{B_n^{(n)} = n!\,B_0 = n!}$$

(b) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$B_n(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(a)\,h^k.$$

Solution. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Le polynôme B_n est de degré n donc la formule de Taylor polynomiale donne directement :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(a)(X-a)^k$$

d'après la question précédente. On conclut par évaluation en $a+h$.

(c) En déduire l'identité suivante dans $\mathbb{R}[X]$:

$$B_n(X+1) - B_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(X).$$

Solution. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on obtient pour $a = x$ et $h = 1$:

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x)\, 1^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j(x)$$

par changement d'indice $j = n-k$. Autrement dit, tout $x \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme différence :

$$B_n(X+1) - B_n(X) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(X),$$

Ce polynôme admet une infinité de racines donc il est nul.

Q.17 Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$.

(a) À l'aide d'une somme double et de la relation obtenue en **Q.14**, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(X+1) - B_n(X) = n\, X^{n-1}.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On développe les polynômes B_k puis on intervertit l'ordre de la sommation triangulaire :

$$\begin{aligned}
B_n(X+1)-B_n(X) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}b_{k-j}X^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{j}b_{k-j}X^j
\end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'indice $i=k-j$, en observant que :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\frac{n!}{j!(n-k)!(k-j)!}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j},$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
B_n(X+1)-B_n(X) &= \sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-j-1}\binom{n-j}{i}b_i\right]\binom{n}{j}X^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left[B_{n-j}(1)-B_{n-j}(0)\right]\binom{n}{j}X^j \\
&= nX^{n-1}
\end{aligned}$$

car tous les termes s'annulent sauf celui pour $j=n-1$.

(b) En déduire que, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$S_p(N)=\frac{B_{p+1}(N+1)-b_{p+1}}{p+1}.$$

Solution. En posant $n=p+1$, la formule précédente donne :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad B_{p+1}(k+1)-B_{p+1}(k)=(p+1)\,k^p.$$

On somme alors pour $k\in[\![0,N-1]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(B_{p+1}(k+1)-B_{p+1}(k)\right)=(p+1)S_p(N).$$

Mais cette somme vaut aussi $B_{p+1}(N+1)-B_{p+1}(0)$ par télescopage, d'où le résultat car $B_{p+1}(0) = b_{p+1}$.

(c) Déterminer, en fonction de $N \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_3(N)$ et $S_4(N)$.

Solution. D'après la formule précédente :

$$S_3(N) = \frac{B_4(N+1) - b_4}{4} = \frac{(N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2}{4}$$

ce qui donne finalement après simplification :

$$\boxed{S_3(N) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}}$$

On obtient de même $S_4(N)$ en déterminant d'abord le polynôme

$$B_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X,$$

ce qui conduit après simplifications à :

$$S_4(N) = \frac{B_5(N+1) - b_5}{5} = \boxed{\frac{6N^5 + 15N^4 + 10N^3 - N}{30}}$$