Sixième devoir en temps libre

à rendre vendredi 9 février

I Comparaison de moyennes

Q.1 *Inégalité de Jensen.* Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, définie sur un intervalle I. En raisonnant par récurrence, montrer que : pour tout $n \geqslant 1$, pour tous $x_1, \dots, x_n$ dans I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, f(x_i).$$

Q.2 Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.

(a) Étudier la convexité de la fonction ln.

(b) En déduire l'*inégalité arithmético-géométrique* :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Q.3 Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$M(\alpha) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(a) Étudier, pour tout réel $\gamma > 0$, la convexité de la fonction $x \mapsto x^{\gamma}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen, que $M : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

(c) Quelle est la limite de la fonction M en 0 ? en $+\infty$?

II Problème d'analyse

A Préliminaire.

Q.1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = e^t + e^t(b-t) + e^t\frac{(b-t)^2}{2}.$$

(a) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \dfrac{1}{2}e^c\,(b-c)^2$.

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \right| \leqslant \dfrac{1}{2}e^{|x|}|x|^3$.

B Étude d'une fonction

Soient a un réel et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(0) = a \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Q.2 Continuité.

(a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

(b) En déduire l'unique valeur de a telle que f soit continue en 0.

On supposera dans toute la suite que a est égal à cette valeur.

Q.3 Régularité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left(\frac{g(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right) f(x)^2 e^x.$$

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}e^{|x|}|x|^3$.

(c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Q.4 Allure de la courbe

(a) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Dresser le tableau de variation complet de f (avec limites en $-\infty$ et en $+\infty$ notamment). *On fera apparaître la valeur en* 0.

(c) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$. On précisera leurs positions relatives.

(d) Quelle est l'équation de la tangente en 0 ?

(e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

C Étude d'une suite

Q.5 Encadrement de la dérivée.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Vérifier que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $h(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.

(b) Montrer que h est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) En déduire que $|f'| \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Que peut-on en déduire pour f ?

Q.6 Convergence. Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{e^{u_n} - 1}$$

(a) Justifier que cette suite est bien définie et à termes strictement positifs.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$, qu'on explicitera.

(c) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.