Sujet d'entraînement (DS 6)

I Exercice d'arithmétique

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.

Q.1 Montrer que $\mathrm{PGCD}(2^{8n} - 3^{2n} + 13,\ 2^{4n} - 3^n) = \mathrm{PGCD}(2^{4n} - 3^n,\ 13)$.

Q.2 Montrer que 13 divise $2^{4n} - 3^n$.

Q.3 En déduire la valeur de $\mathrm{PGCD}(2^{8n} - 3^{2n} + 13,\ 2^{4n} - 3^n)$.

II Exercice de polynôme

Q.4 **Cours.** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P.

- **(a)** Quelle est la *définition* de la multiplicité m de α ?
- **(b)** Donner la *caractérisation* de la multiplicité à l'aide des dérivées.

Q.5 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P = X^4 - aX^3 + aX - 1$.

- **(a)** Montrer que $X^2 - 1$ divise P.
- **(b)** Déterminer a tel que -1 est racine de P de multiplicité au moins 2.
  Préciser alors la multiplicité exacte de -1.
- **(c)** Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Q.6 On pose $Q = X^4 + X^2 + 1$.

- **(a)** Le polynôme Q admet-t-il des racines réelles ?
- **(b)** Le polynôme Q est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

III Exercice de convexité

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement *négatives*.

Le but de l'exercice est d'étudier qualitativement les solutions de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$, à coefficients non constants, qu'on ne cherchera pas à résoudre.

Q.7 Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, *convexe*. Montrer que la fonction φ est majorée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est constante.

Q.8 Soit f une solution de l'équation différentielle, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + q(x)f(x) = 0. \tag{E}$$

(a) Montrer que f^2 est une fonction convexe.

(b) En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, alors f est constante.

(c) Montrer que la fonction nulle est l'unique solution bornée de l'équation (E).

Q.9 Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

(a) En considérant sa tangente en 0, montrer que f^2 est minorée par 1.

(b) En déduire que f est minorée par 1 et convexe.

(c) Dresser le tableau de variation de f. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

(d) On suppose ici qu'il existe un réel $a > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) \leqslant -a^2$.
Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x)/\mathrm{ch}(ax)$ et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant \mathrm{ch}(ax).$$

IV Problème

Q.10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,dt = 0.$$

Notations. *Dans toute la suite du sujet, on considère l'unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et les relations de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n' = n\,B_{n-1} \quad \textit{et} \quad \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = B_n(0)$ le coefficient constant de B_n.

Q.11 Expliciter les polynômes B_n et les entiers b_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Q.12 Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de B_n.

Q.13 Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

Q.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

(c) Calculer b_5 et b_6.

Q.15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = (-1)^n \, B_n(1 - X)$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = B_n$.

(b) Montrer que, pour tout $m \geqslant 3$ impair, les réels 0, 1 et $\frac{1}{2}$ sont racines de B_m.

Q.16 Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Exprimer $B_n^{(k)}$ en fonction de B_{n-k} pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Simplifier $B_n^{(n)}$.

(b) Montrer que pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$B_n(a + h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(a) \, h^k.$$

(c) En déduire l'identité suivante dans $\mathbb{R}[X]$:

$$B_n(X + 1) - B_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(X).$$

Q.17 Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^p$.

(a) À l'aide d'une somme double et de la relation obtenue en **Q.14**, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(X + 1) - B_n(X) = n \, X^{n-1}.$$

(b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N + 1) - b_{p+1}}{p + 1}.$$

(c) Déterminer, en fonction de $N \in \mathbb{N}$, la valeur de $S_3(N)$ et $S_4(N)$.