Sujet d'entraînement (DS 7)
Analyse asymptotique et espaces vectoriels

Solutions

I Exercice

Calculer les développements limités suivants à l'ordre et au point indiqués.

Q.1 $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto e^x \operatorname{Arctan} x$.

Solution. $\operatorname{Arctan} x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$ est de la forme $x(1 + \cdots + o(x^3))$. Un $DL_3(0)$ est donc suffisant pour l'autre facteur $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Par produit, on obtient :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)}$$

Q.2 $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Solution. Par $DL_4(0)$ usuel de $x \mapsto \sin x$,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

On peut donc substituer $y = u(x)$ où $u(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$ tend vers 0, dans le $DL_2(0)$ suivant :

$$e^{1+y} \underset{y \to 0}{=} e^1 e^y \underset{y \to 0}{=} e^1 \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right).$$

avec

$$y = -\frac{x^2}{6} + o(x^3), \quad y^2 = o(x^3).$$

On obtient finalement :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} e - \frac{e}{6}x^2 + o(x^3)}$$

Q.3 $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan x}$.

Solution. Le numérateur et le dénominateur ont des $DL(0)$ de la forme

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\tan x} = \frac{x + ... + o(x^n)}{x + \cdots + o(x^n)} = \frac{1 + ... + o(x^{n-1})}{1 + \cdots + o(x^{n-1})}$$

On doit donc chercher des $DL_3(0)$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3), \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Après simplification,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\tan x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} + o(x^2)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

On substitue dans $\frac{1}{1+y} = 1 - y + o(y)$ avec $y = \frac{x^2}{3} + o(x^2)$, de limite 0 :

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

On conclut alors par produit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{48} + o(x^2)}$$

Q.4 $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $f : x \mapsto \cos x + \sin x$.

Solution. On procède par substitution $x = \frac{\pi}{4} + u$ où $u \to 0$:

$$\cos(\tfrac{\pi}{4} + u) + \sin(\tfrac{\pi}{4} + u) = \sqrt{2}\cos(u) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)\right)$$

d'où finalement :

$$\boxed{f(x) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)}$$

II Exercice

Soit la fonction $f : x \longmapsto (x^2 - 1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ définie de $]1, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Q.5 Étudier les limites de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to 1$.

Solution.

- En $+\infty$, le quotient $\dfrac{x+1}{x-1} \sim \dfrac{x}{x}$ tend vers 1, donc :

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2x^2}{x-1} \sim \boxed{2x}.$$

  Deux équivalents ont même limite donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$

- En 1, on peut substituer $x = 1 + h$ où $h \to 0$:

$$f(1+h) = (2h + h^2)\left(\ln(2+h) - \ln(h)\right) \sim -2h\ln(h)$$

  car $-\ln(h) \to +\infty$ tandis que $\ln(2+h) \to \ln 2$.

  Par croissances comparées, on obtient finalement $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0.}$

Q.6 Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction

$$g : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Solution. On doit chercher un $DL_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x)-\ln(1-x)\\ &\underset{0}{=} \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+o(x^3).\\ &\underset{0}{=} 2x+\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

d'où $\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} 2+\frac{2}{3}x^2+o(x^2).}$

Q.7 Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Solution. On peut procéder par substitution avec $\dfrac{1}{x}\to 0$ en notant que :

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)g\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} x\left(2-\frac{4}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} 2x-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Alors $f(x)-2x\to 0$ en ∞. La courbe de f admet donc

$$\boxed{\text{une asymptote au voisinage de } +\infty\text{, d'équation } y=2x.}$$

D'autre part $f(x)-2x\sim -\dfrac{4}{3x}$ donc $f(x)-2x<0$ au voisinage de $+\infty$.

$$\boxed{\text{La courbe est donc située sous son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

III Exercice

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{\alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\},$$
$$G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(1) = 0\}.$$

Q.8 Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$.

> **Solution.** La famille $\boxed{(1, X, X^2, X^3, X^4)}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
>
> En particulier, $\boxed{\dim \mathbb{R}_4[X] = 5}$.

Q.9 *Étude de F.*

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

> **Solution.** Les éléments de F sont tous les polynômes
>
> $$\alpha\,(X^4 + X) + \beta\,(X + 1) \in \mathbb{R}_4[X]$$
>
> où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit, $F = \mathrm{Vect}(X^4 + X,\ X + 1)$.
>
> C'est en particulier un sous-espace vectoriel de E.

(b) Déterminer une base de F. En déduire sa dimension.

> **Solution.** La famille $(X^4 + X,\ X + 1)$ est génératrice de F d'après la question précédente. Les polynômes $X^4 + X$ et $X + 1$ ne sont pas colinéaires donc cette famille est libre.
>
> $$\boxed{\text{La famille } (X^4 + X,\ X + 1) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim F = 2.}$$

Q.10 *Étude de G.*

(a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

> **Solution.** L'ensemble G est une partie de $\mathbb{R}_4[X]$ donc $G \subset E$.
>
> Le polynôme nul $P = 0$ vérifie $P'(1) = 0$ donc $P \in G$.
>
> Soient P, Q deux éléments de G et λ un réel. Alors $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_[X]$ et, par linéarité de la dérivation,
>
> $$(\lambda P + Q)'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0.$$

On a donc bien $\lambda P + Q \in G$.

(b) Prouver que $\dim G \leqslant 4$.

Solution. On sait que $\dim G \leqslant \dim E$ car c'est un sous-espace vectoriel de E. De plus $G \neq E$ car il existe des polynômes P tels que $P'(1) \neq 0$, par exemple $P = 1$. On en déduit que $\dim G < \dim E$ par contraposée du cas d'égalité des dimensions pour un sous-espace vectoriel. Or $\dim E = 5$, donc $\dim G \leqslant 4$.

(c) Montrer que $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille libre.

Solution. Ces polynômes sont de degrés échelonnées $0 < 2 < 3 < 4$ donc la famille est libre dans $\mathbb{R}_4[X]$.

(d) En déduire la dimension de G, puis une base de G.

Solution. Les polynômes 1, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$ et $(X-1)^4$ appartiennent à G, qui est de dimension finie car c'est un sous-espace vectoriel de E. On sait que toute famille libre de G contient au plus $\dim G$ éléments. Donc $\dim \geqslant 4$ et finalement $\boxed{\dim G = 4}$.

Par caractérisation des bases en dimension finie, toute famille libre contenant 4 éléments est une base, donc

$$\boxed{\text{la famille } (1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4) \text{ est une base de } G.}$$

Q.11 *Étude de $F + G$.*

(a) Démontrer que $F \cap G = \mathrm{Vect}(X^4 - 4X - 5)$

Solution. Soit $P \in F \cap G$. On dispose alors de α, β réels tels que :

$$P = \alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta.$$

De plus $P \in G$ donc $P'(1) = 4\alpha + (\alpha + \beta) = 0$. Ainsi, $\beta = -5\alpha$ et donc $P = \alpha X^4 - 4\alpha X - 5\alpha$. Ceci prouve que $P \subset \mathrm{Vect}(X^4 - 4X - 5)$.

Pour l'inclusion réciproque, il suffit de vérifier que $X^4 - 4X - 5 \in F \cap G$ car c'est un sous-espace vectoriel. On pose pour cela $\alpha = 1$, $\beta = -5$ et on vérifie que $(X^4 - 4X - 5)'(1) = 4 - 4 = 0$.

(b) Déterminer les dimensions de $F \cap G$ et $F + G$.

Solution. Le polynôme non nul $X^4 - 4X - 5$ forme une base de $F \cap G$. Donc $\boxed{\dim(F \cap G) = 1}$ et par formule de Grassmann :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 4 - 1 = 5}$$

(c) Que peut-on en déduire pour $F + G$? La somme est-elle directe ?

Solution. On sait que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E par somme. De plus $\dim(F+G) = \dim E$ donc $\boxed{F + G = E.}$.

Cependant, $\boxed{\text{la somme n'est pas directe car } X^4 - 4X - 5 \in F \cap G.}$

Q.12 Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$. On admet que H est un sous-espace vectoriel de G.

(a) Montrer que H est de dimension 3.

Solution. Les polynômes $((X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ forment une famille libre de H donc $\dim H \geqslant 3$. De plus $\dim H \leqslant 4$ car c'est un sous-espace vectoriel de G. Enfin $H \neq G$ car $1 \notin H$ donc $\boxed{\dim H = 3}$.

(b) Montrer que $F \cap H \subset F \cap G$.

Solution. Soit $P \in F \cap H$. Alors $P \in F$ et $P \in H$. En particulier $P \in G$ car $H \subset G$, donc $\boxed{P \in F \cap H}$.

(c) En déduire que F et H sont supplémentaires dans E.

Solution. Soit $P \in F \cap H$. D'après la question prédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha(X^4 - 4X - 5)$. De plus $P \in H$ donc $P(1) = 0$, c'est-à-dire que $-8\alpha = 0$. Donc $\alpha = 0$ et P est le polynôme nul.

On a donc $\boxed{F \cap H = \{0_E\}}$ (car $F \cap H$ contient 0_E), c'est-à-dire que les sous-espaces F et H sont en somme directe. De plus

$$\boxed{\dim F + \dim H = 2 + 3 = 5 = \dim E.}$$

Par caractérisation en dimension finie, F et H sont supplémentaires.

IV Exercice

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ la famille de vecteurs définie par :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad u_i = e_i + e_{i+1} \quad \text{et} \quad u_n = e_n + e_1.$$

Q.13 Montrer que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ est libre.

Solution. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i = 0_E$.

En développant la somme,

$$\lambda_1 e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + \cdots + (\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1})e_{n-1} + \lambda_{n-1}e_n = 0_E.$$

Par liberté de la base $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient donc :

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \; \ldots, \; \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} = 0, \; \lambda_{n-1} = 0.$$

On en déduit de proche en proche que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont tous nuls.

Q.14 Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i u_i = ((-1)^n - 1)\, e_1$.

Solution. On développe, de manière à faire apparaître un télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (-1)^i u_i &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i e_i + \overbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} e_j}^{j=i+1} + (-1)^n (e_n + e_1) \\
&= ((-1)^n - 1)e_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} (-1)^i e_i - \sum_{j=2}^{n} (-1)^j e_j}_{0}
\end{aligned}$$

Q.15 On suppose que n est *pair*. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{U}$.

Solution. L'entier n est pair donc $((-1)^n - 1)\, e_1 = 0_E$. Ceci montre que la famille $\mathcal{U}$ est liée, donc ce n'est pas une base. En particulier, $\mathrm{rg}(\mathcal{U}) \leqslant n - 1$.

Mais par ailleurs, $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est libre donc $\operatorname{rg}(\mathcal{U}) \geqslant n-1$. Finalement :

$$\boxed{\operatorname{rg}(\mathcal{U}) = n-1}.$$

Q.16 On suppose que n est *impair* et on pose $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

(a) Montrer que F contient le vecteur e_1, ainsi que $e_2, \dots, e_n$.

Solution. L'entier n est impair donc $(-1)^n - 1 = -2$. D'où

$$e_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u_i.$$

Ceci donne $e_1 \in F$. Or $e_2 = u_1 - e_1$ donc $e_2 \in F$ aussi. Puis de proche en proche, $e_3 = u_2 - e_2 \in F, \dots, e_n = u_n - e_{n-1} \in F$.

(b) En déduire que $\mathcal{U}$ est une base et exprimer les coordonnées des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ dans la base $\mathcal{U}$.

Solution. F est un sous-espace vectoriel de E et contient $e_1, \dots, e_n$ donc F contient toute combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_n$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, on a donc $F = E$. On en déduit que $\mathcal{U}$ est une famille génératrice. C'est donc une base car $\dim E = n$.

L'expression de e_1 à la question précédente donne directement ses coordonnées, puis en déduit celles des autres de proche en proche :

$$\begin{array}{c|c}
e_1 & (+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \\
e_2 & (+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\
e_3 & (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \\
\vdots & \vdots \\
e_n & (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})
\end{array}$$

V Exercice

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Q.17 La fonction tangente hyperbolique $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\operatorname{th} : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Montrer que $\operatorname{th}' < 1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{th} x < x.$$

Solution. Les fonctions ch et sh sont dérivables et ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc th est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x),$$

d'où $\boxed{\operatorname{th}'(x) < 1 \text{ si } x \neq 0.}$

A fortiori, la fonction $\varphi : x \mapsto \operatorname{th} x - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\varphi(x) < 0$ car $\varphi(0) = 0$. Ceci donne $\boxed{\operatorname{th} x < x}$.

Q.18 En déduire le tableau de variation de f. Déterminer les limites aux bornes.

Solution. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente, car $\operatorname{ch} > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Étude des limites :

- Lorsque $x \to 0^+$, on peut substituer $u = \dfrac{1}{x}$ avec $u \to +\infty$.

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\operatorname{sh} u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u} \underset{u \to +\infty}{\sim} \frac{e^u}{2u}$$

  Or $\dfrac{e^u}{u} \to +\infty$ par croissances comparées et deux équivalents ont même limite, donc :

$$\frac{\operatorname{sh} u}{u} \to +\infty, \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$$

- Lorsque $x \to +\infty$, on peut substituer $u = \dfrac{1}{x}$ avec $u \to 0^+$:

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\operatorname{sh} u}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{u}.$$

Or deux équivalents ont même limite donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$

Q.19 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $u \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} u}{u}$.

Solution. Par développement usuel de sh :

$$\frac{\operatorname{sh} u}{u} \underset{u\to 0}{=} \frac{u + \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o(u^5)}{u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} + o(u^4).$$

Q.20 En déduire des réels $a_0, a_1, \dots, a_4$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Solution. On peut substituer $u = \frac{1}{x}$ dans le DL précédent car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, ce qui donne directement le développement asymptotique souhaité en posant :

$$\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{120}.}$$

Q.21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $f(x) = \dfrac{n+1}{n}$.

(a) Montrer que cette équation admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. La fonction f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. D'après les limites, f réalise donc une $\boxed{\text{bijection}}$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle image :

$$\boxed{f(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 0$, donc $\frac{n+1}{n}$ admet un unique antécédent $x_n = f^{(-1)}(\frac{n+1}{n})$ par bijectivité.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ car $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$. Par décroissance de f (contraposée), on a donc : $x_{n+1} > x_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

(c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

Solution. La suite (x_n) est croissante donc elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par théorème de la limite monotone.

Supposons que ℓ soit finie et cherchons une contradiction. Alors $x_n \to \ell$ entraîne $f(x_n) \to f(\ell)$ par continuité de f, c'est-à-dire $1 + \frac{1}{n} \to f(\ell)$. Finalement $f(\ell) = 1$ par passage à la limite. On aurait alors $\lim\limits_{+\infty} f < 1$ par stricte décroissance, ce qui est absurde.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty}$.

Q.22 **(a)** Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution. Puisque $x_n \to +\infty$, on peut substituer dans le développement asymptotique de f :

$$\begin{aligned} f(x_n) &\underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x_n^2} + \frac{1}{120x_n^4} + o\left(\frac{1}{x_n^4}\right) \\ &\underset{n\to\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs $f(x_n) = 1 + \frac{1}{n}$, on en déduit :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{6x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6x_n^2}$$

On conclut par passage à la puissance $-\frac{1}{2}$ (compatible avec les équivalents) :

$$\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{6}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}.}$$

(b) Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution. On réécrit le développement asymptotique sous la forme :

$$x_n^2 = \frac{n}{6}\left(1 + \frac{1}{20x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right)\right). \tag{$*$}$$

D'après l'équivalent précédent $\frac{1}{x_n^2} \sim \frac{6}{n}$, i.e. $\frac{1}{x_n^2} = \frac{6}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$$x_n^2 = \frac{n}{6}\left(1 + \frac{3}{10n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

On conclut par substitution dans le $DL_1(0)$ usuel $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$:

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{\frac{n}{6}}\left(1 + \frac{3}{20n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{n} + \frac{\sqrt{6}}{40}\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \end{aligned}$$

Remarque. L'énoncé demandait un développement en $o(\frac{1}{n})$. Ce n'était pas très raisonnable en temps limité mais la méthode reste la même :

- on pousse le développement $(*)$ à une précision plus élevée à l'aide des DL usuels de $u \mapsto \operatorname{sh} u$;
- on développe $\frac{1}{x_n^2}$ à l'ordre $o(\frac{1}{n^2})$ en injectant le résultat précédent ;
- on développe le tout à l'aide de $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$.

Vous pourrez vérifier qu'on obtient encore :

$$x_n = \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{n} + \frac{\sqrt{6}}{40}\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

(le prochain terme du développement asymptotique est d'ordre $\frac{1}{n\sqrt{n}}$)