Huitième devoir en temps libre

Solutions

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de l'exercice est d'étudier les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E). \tag{$\star$}$$

On notera $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E)$.

Q.1 Exemple en dimension 2. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{4}(x + 3y, 3x + y).$$

(a) Justifier que f est bien un endomorphisme de E.

> **Solution.** L'application f est bien définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrons qu'elle est linéaire. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et λ, λ' réels :
>
> $$\begin{aligned} f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') &= \frac{1}{4}(\lambda x + \lambda' x' + 3\lambda y + 3\lambda' y', \cdots) \\ &= \frac{\lambda}{4}(x + 3y, \cdots) + \frac{\lambda'}{4}(x' + 3y', \cdots) \\ &= \lambda f(x,y) + \lambda' f(x',y'). \end{aligned}$$

(b) Montrer que f est solution de $(\star)$.

Solution. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On calcule $f^2(x,y)$ par linéarité :

$$\begin{aligned} f(f(x,y)) &= \frac{1}{4} f(x+3y, 3x+y) \\ &= \frac{1}{16}\big((x+3y)+3(3x+y),\ 3(x+3y)+(3x+y)\big) \\ &= \frac{1}{16}\big(10x+6y, 6x+10y\big) \\ &= \frac{1}{8}\big(5x+3y, 3x+5y\big). \end{aligned}$$

Et d'autre part pour $\frac{1}{2}(f+\mathrm{id}_E)(x,y)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(f(x,y)+(x,y)\big) &= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}(x+3y,3x+y)+(x,y)\big) \\ &= \frac{1}{8}\big(5x+3y, 3x+5y\big). \end{aligned}$$

Ces termes sont égaux pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $f^2 = \dfrac{1}{2}(f+\mathrm{id}_E)$.

(c) Déterminer une base de E_1 et une base de E_2. En déduire que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

Solution. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition,

$$(x,y) \in E_1 \iff f(x,y)-(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$$

En paramétrant, il vient alors :

$$E_1 = \{(\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u), \qquad \text{où} \quad u = (1,1).$$

Puisque $f(x,y) + \frac{1}{2}(x,y) = \frac{3}{4}(x+y, x+y)$, on obtient de même :

$$E_2 = \{(\lambda,-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(v), \qquad \text{où} \quad v = (1,-1).$$

Les vecteurs u, v sont non nuls donc (u) et (v) sont des bases de E_1 et E_2 respectivement. En particulier, $\dim E_1 + \dim E_2 = 1+1 = \dim E$.

De plus, $E_1 = \mathrm{Vect}(u)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(v)$ sont en somme directe car $\mathrm{Vect}(u) \cap$

$\mathrm{Vect}(v) = \{(0,0)\}$ (sinon u et v seraient colinéaires). Par caractérisation en dimension finie, on a donc $E = E_1 \oplus E_2$.

(d) Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2. Pour tout vecteur $(x,y) \in E$, expliciter l'image $p(x,y)$.

Solution. Soit $(x,y) \in E$. Il existe $(\lambda,\lambda) \in E_1$ et $(\mu,-\mu) \in E_2$ uniques tels que $(x,y) = (\lambda,\lambda) + (\mu,-\mu)$, ce qui se traduit par :

$$x = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad y = \lambda - \mu.$$

Par définition de p, il vient donc $p(x,y) = (\lambda,\lambda) = \dfrac{1}{2}(x+y, x+y)$.

Q.2 Retour au cas général. On suppose seulement que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $(\star)$.

(a) Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer des réels α, β tels que

$$f^{-1} = \alpha\, f + \beta\, \mathrm{id}_E.$$

Solution.

- *Méthode 1.* On procède par factorisation comme pour les matrices : $2f^2 - f = \mathrm{id}_E$, donc $f \circ (2f - \mathrm{id}_E) = (2f - \mathrm{id}_E) \circ f = \mathrm{id}_E$. Il s'ensuit directement que f est bijective, de réciproque :

$$f^{-1} = 2f - \mathrm{id}_E.$$

- *Méthode 2.* On étudie le noyau. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Par linéarité $f^2(x) = f(0) = 0$ mais aussi $f^2(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = \frac{1}{2}x$ par hypothèse, d'où $x = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Donc f est injective. Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, f est donc aussi bijective de E dans E car $\dim E = \dim E$. Sachant que $2f^2 - f = \mathrm{id}_E$, on en déduit l'expression de f^{-1} par composition.

(b) On pose $p = \frac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} p = E_2$ et $\operatorname{Im} p = E_1$.

Solution. Soit $x \in E$. En multipliant par le réel $\frac{3}{2}$ non nul,

$$p(x) = 0 \iff (f + \tfrac{1}{2}\mathrm{id}_E)(x) = 0.$$

Ceci montre déjà que $\operatorname{Ker} p = E_2$.

Montrons maintenant que $\operatorname{Im} p = E_1$ par double inclusion.

- Soit $x \in E_1$. Alors $f(x) - x = 0$, donc $p(x) = \frac{1}{3}(2x + x)$.

  En particulier $x = p(x) \in \operatorname{Im} p$.

- Soit $y \in \operatorname{Im} p$. On dispose de $x \in E$ tel que $y = \frac{1}{3}(2f(x) + x)$. Mais alors, par hypothèse sur f^2,

  $$f(y) = \tfrac{2}{3}f^2(x) + \tfrac{1}{3}f(x) = \tfrac{2}{3}f(x) + \tfrac{1}{3}x = y.$$

  Autrement dit $f(y) - y = 0$ donc $y \in E_1$.

(c) Montrer que p est un projecteur. Qu'en déduire pour E_1 et E_2 ?

Solution. On sait que $p \in \mathscr{L}(E)$. Calculons p^2 sachant que $2f$ commute avec id_E, à l'aide de l'hypothèse sur f^2 :

$$p^2 = \tfrac{1}{9}(4f^2 + 4f + \mathrm{id}_E) = \tfrac{1}{9}(6f + 3\mathrm{id}_E) = \tfrac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E),$$

c'est-à-dire que $p^2 = p$. Par caractérisation algébrique, il existe alors F, G s.e.v. supplémentaires (dans E) tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Mais alors $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$. Finalement, E_1 et E_2 sont supplémentaires.

(d) Calculer $p \circ (f - \mathrm{id}_E)$. En déduire que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) = E_2$.

Solution. On développe par bilinéarité :

$$\frac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E) = \tfrac{2}{3}(2f^2 - f - \mathrm{id}_E) = 0.$$

Soit $y \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. On dispose alors de $x \in E$ tel que $y = f(x) - x$. Il vient :

$$(f + \tfrac{1}{2}\mathrm{id}_E)(y) = \tfrac{1}{2}(2f + \mathrm{id}_E)(y) = \tfrac{3}{2}\left(p \circ (f - \mathrm{id}_E)\right)(x) = 0,$$

de sorte que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset E_2$. D'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$$

donc $\dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) = \dim E - \dim E_1 = \dim E_2$. Par cas d'égalité des dimensions pour un s.e.v. on conclut : $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) = E_2$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer λ_n, μ_n réels tels que $f^n = \lambda_n p + \mu_n \mathrm{id}_E$.

Solution. Par définition de p, on a directement $f = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}\mathrm{id}_E$. Puisque $\frac{3}{2}p$ commute avec l'homothétie $-\frac{1}{2}\mathrm{id}_E$, on obtient directement par formule du binôme de Newton pour tout $n \geqslant 1$:

$$f^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^k p^k$$

Sachant que $p^2 = p$, on peut simplifier les termes d'indices $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} f^n &= \frac{(-1)^n}{2^n}\mathrm{id}_E + \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^k\right)p \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\mathrm{id}_E + \frac{2^n - (-1)^n}{2^n}p. \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère le polynôme $A = X(X - \frac{1}{2})(X-1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q.3 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = \big(P(0), P(\tfrac{1}{2}), P(1)\big)\,.$$

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}\,(A)$. Quel est le rang de φ ?

Solution. On raisonne par double inclusion. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $\varphi(\lambda A) = (0,0,0)$, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors $P(0) = P(\frac{1}{2}) = P(1)$ donc $0, \frac{1}{2}$ et 1 sont racines de P de multiplicités au moins 1. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-0)(X-\frac{1}{2})(X-1)Q$. De plus $\deg Q \leqslant 0$ car $\deg P \leqslant 3$. Donc Q est un polynôme constant, c'est-à-dire que $P \in \mathrm{Vect}\,(A)$.

Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}(A)$ est de dimension 1 car A n'est pas nul. D'après le théorème du rang :

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{rg}\,\varphi$$

donc $\mathrm{rg}\,\varphi = 4 - 1 = 3$.

(b) En déduire qu'il existe $(P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que :

$$\varphi(P_1) = (1,0,0), \quad \varphi(P_2) = (0,1,0), \quad \varphi(P_3) = (0,0,1)$$

et justifier que (A, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

N.B. On ne demande pas d'expliciter ces polynômes.

Solution. D'après la question précédente, $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{rg}\,\varphi = 3$.

- Or $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, donc nécessairement $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^3$. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par surjectivité de φ, ces vecteurs admettent des antécédents P_1, P_2, P_3 dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- Montrons que la famille (A, P_1, P_2, P_3) est libre. Soient $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ réels tels que
$$\alpha A + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 = 0.$$
En appliquant φ, on obtient par linéarité
$$0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 = 0$$
c'est-à-dire que $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0,0,0)$. Mais alors $\alpha A = 0$, donc $\alpha = 0$ aussi car A n'est pas nul.
- Par caractérisation en dimension finie, la famille libre (A, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ car sa dimension est 4.

Q.4 On pose $I = \displaystyle\int_0^1 A(t)\,dt$.

(a) Justifier que $I = -I$ par changement de variable $t = 1 - s$. En déduire I.

Solution. Notons I cette intégrale. La formule de changement de variable donne :

$$I = \int_0^1 A(t)\,dt = -\int_1^0 A(1-s)\,ds = \int_0^1 A(1-s)\,ds$$

où $A(1-s) = (1-s)(\frac{1}{2} - s)(1 - (1-s)) = -A(s)$ sur $[0,1]$.

Ainsi, $I = -I$ et donc $I = 0$.

(b) En considérant les polynômes P_1, P_2 et P_3, montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_1 P(0) + \lambda_2 P(\tfrac{1}{2}) + \lambda_3 P(1).$$

Solution.

- *Analyse.* Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un triplet solution. En particulier

$$\int_0^1 P_1(t)\,dt = \lambda_1 P_1(0) + \lambda_2 P_1(\tfrac{1}{2}) + \lambda_3 P_1(1) = \lambda_1$$

  par $(P_1(0), P_1(\frac{1}{2}), P_1(1)) = (1, 0, 0)$. De même :

$$\int_0^1 P_2(t)\,dt = \lambda_2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_3(t)\,dt = \lambda_3.$$

- *Synthèse.* Vérifions que le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ défini par les intégrales de P_1, P_2, P_3 est bien une solution.

  Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Puisque (A, P_1, P_2, P_3) est une base, il existe $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ réels tels que $P = \alpha A + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3$. Mais alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \alpha \int_0^1 A(t)\,dt + \sum_{i=1}^{3} \beta_i \int_0^1 P_i(t)\,dt = 0 + \sum_{i=1}^{3} \beta_i \lambda_i.$$

  On en déduit l'égalité voulue car $\lambda_1 P(0) = \lambda_1(0 + \beta_1 + 0 + 0)$ et de même $\lambda_2 P(\frac{1}{2}) = \lambda_2 \beta_2$ ainsi que $\lambda_3 P(1) = \lambda_3 \beta_3$.

(c) Montrer que $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{4}{6}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{6}$.

Solution. Pour $P = X(X-1)$, la formule donne en particulier :

$$-\frac{1}{4}\lambda_2 = \lambda_1 P(0) + \lambda_2 P(\tfrac{1}{2}) + \lambda_3 P(1) = \int_0^1 (t^2 - t)\,dt = -\frac{1}{6},$$

d'où $\lambda_2 = \frac{4}{6}$. On en déduit ensuite que $\lambda_3 = \frac{1}{6}$ en prenant par exemple $P = X$, puis $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ avec $P = 1 - X$.

Q.5 (Facultatif) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ |f^{(4)}(x)| \leqslant M$.

> **Solution.** La fonction $f^{(4)}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée d'après le théorème des bornes atteintes.

(b) On pose $S(f) = \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(\frac{1}{2}) + \lambda_3 f(1)$. Montrer alors que :

$$\left| \int_0^1 f(t)\, dt - S(f) \right| \leqslant \frac{M}{4!}.$$

> **Solution.** L'idée est de remplacer f par un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$:
>
> $$P = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!} (X - \tfrac{1}{2})^k.$$
>
> D'après la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 3 en $\frac{1}{2}$,
>
> $$\forall t \in [0,1], \quad |f(t) - P(t)| \leqslant \frac{M}{4!} |t - \tfrac{1}{2}|^4.$$
>
> On sait que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt = S(P)$. Donc par inégalités triangulaires :
>
> $$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t)\, dt - S(f) \right| &= \left| \int_0^1 f(t)\, dt - \int_0^1 P(t)\, dt + S(P) - S(f) \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^1 (f(t) - P(t))\, dt \right| + |S(f) - S(P)| \\ &\leqslant \underbrace{\int_0^1 |f(t) - P(t)|\ dt}_{A} + \underbrace{|S(f) - S(P)|}_{B}. \end{aligned}$$
>
> L'inégalité de Taylor–Lagrange permet de majorer l'intégrale :
>
> $$A \leqslant \frac{M}{4!} \int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^4\, dt \leqslant \frac{M}{4! \times 40},$$
>
> ainsi que le second membre :
>
> $$B \leqslant \frac{|f(0) - P(0)|}{6} + \frac{4|0|}{6} + \frac{|f(1) - P(1)|}{6} \leqslant \frac{M}{4! \times 48}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\frac{1}{40} + \frac{1}{48} \leqslant 1$.

Commentaire. En appliquant ce résultat à une subdivision de l'intervalle, on obtient une méthode de calcul numérique d'intégrale beaucoup plus précise que la méthode des rectangles pour les fonctions suffisamment régulières : la méthode de Simpson.

(c) En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f - \frac{1}{6} \left(f(0) + f(1) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\tfrac{k}{n}\right) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\tfrac{2k+1}{2n}\right) \right) \right| \leqslant \frac{C}{n^4}.$$

Indication. Considérer les fonctions $f_k : t \mapsto f\left(\frac{k+t}{n}\right)$ *pour* $k \in [\![0, n-1]\!]$.