Huitième devoir en temps libre

à rendre le mercredi 24 avril

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de l'exercice est d'étudier les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifient :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E). \tag{$\star$}$$

On notera $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E)$.

Q.1 Exemple en dimension 2. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$E = \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{4}(x + 3y, 3x + y).$$

(a) Justifier que f est bien un endomorphisme de E.

(b) Montrer que f est solution de $(\star)$.

(c) Déterminer une base de E_1 et une base de E_2. En déduire que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

(d) Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2. Pour tout vecteur $(x, y) \in E$, expliciter l'image $p(x, y)$.

Q.2 Retour au cas général. On suppose seulement que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $(\star)$.

(a) Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer des réels α, β tels que

$$f^{-1} = \alpha f + \beta\, \mathrm{id}_E.$$

(b) On pose $p = \frac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = E_2$ et $\mathrm{Im}\, p = E_1$.

(c) Montrer que p est un projecteur. Qu'en déduire pour E_1 et E_2 ?

(d) Calculer $p \circ (f - \mathrm{id}_E)$. En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) = E_2$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer λ_n, μ_n réels tels que $f^n = \lambda_n p + \mu_n \mathrm{id}_E$.

Exercice 2

On considère le polynôme $A = X(X - \frac{1}{2})(X - 1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q.3 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^3)$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = \big(P(0), P(\tfrac{1}{2}), P(1)\big)\,.$$

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(A)$. Quel est le rang de φ ?

(b) En déduire qu'il existe $(P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que :

$$\varphi(P_1) = (1,0,0), \quad \varphi(P_2) = (0,1,0), \quad \varphi(P_3) = (0,0,1)$$

et justifier que (A, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

N.B. On ne demande pas d'expliciter ces polynômes.

Q.4 On pose $I = \displaystyle\int_0^1 A(t)\,dt$.

(a) Justifier que $I = -I$ par changement de variable $t = 1 - s$. En déduire I.

(b) En considérant les polynômes P_1, P_2 et P_3, montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_1 P(0) + \lambda_2 P(\tfrac{1}{2}) + \lambda_3 P(1).$$

(c) Montrer que $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{4}{6}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{6}$.

Q.5 (Facultatif) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ |f^{(4)}(x)| \leqslant M$.

(b) On pose $S(f) = \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(\frac{1}{2}) + \lambda_3 f(1)$. Montrer alors que :

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S(f) \right| \leqslant \frac{M}{4!}.$$

(c) En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 f - \frac{1}{6}\left(f(0) + f(1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(\tfrac{k}{n}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{2k+1}{2n}) \right) \right| \leqslant \frac{C}{n^4}.$$

Indication. Considérer les fonctions $f_k : t \mapsto f(\frac{k+t}{n})$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.