Neuvième devoir en temps libre

à rendre le mardi 21 mai

Problème

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Dans tout le problème :

- les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P) ;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I. Coefficient de corrélation d'un schéma de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_k = 1) = p \quad \textit{et} \quad P(X_k = 0) = 1 - p.$$

On fait l'hypothèse qu'il existe un certain réel r, appelé coefficient de corrélation *tel que, pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$,*

$$\frac{\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \textit{si } k = \ell \\ r & \textit{si } k \neq \ell \end{cases}$$

Q.1 Dans les cas (*i*) et (*ii*) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

Préciser de plus la loi de S_n dans chacun des deux cas précédents.

Q.2 On revient au cas général.

(a) Calculer la variance de $X_1/\sqrt{V(X_1)} - X_2/\sqrt{V(X_2)}$.

(b) Quelle est la valeur maximale possible pour le coefficient r ?

Q.3 On note S_n la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Montrer que sa variance est : $V(S_n) = np(1-p)(1+(n-1)r)$.

(b) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

Q.4 On suppose dans cette question que $n = 2$.

(a) Exprimer $E(X_1X_2)$ en fonction de p et r. Montrer que r est égal à -1 si, et seulement si, $P\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = p(2p-1)$.

(b) Montrer que, dans ce cas, $P\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\right) = 1 - 3p + 2p^2$.

(c) En déduire que si r vaut -1, alors $p = \dfrac{1}{2}$ et $P\left(X_1 + X_2 = 1\right) = 1$.

Q.5 On suppose dans cette question que $n \geqslant 3$ et que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = 1.$$

(a) Déterminer alors les valeurs de p et r en fonction de n.

(b) Quels sont les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ de valeurs possibles pour $(X_1, \ldots, X_n)$? Déterminer la loi conjointe de ces variables aléatoires.

Partie II. Points fixes d'une permutation aléatoire

Dans cette partie uniquement, Ω est l'ensemble des *permutations* de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire des bijections σ de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On munit Ω de la *probabilité uniforme*, notée P, et on définit les variables aléatoires $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ par :

$$\forall \sigma \in \Omega, \quad X_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q.6 Rappeler quel est le cardinal de Ω. Puis dénombrer :

(i) les permutations $\sigma \in \Omega$ telles que $\sigma(1) = 1$.

(ii) les permutations $\sigma \in \Omega$ telles que $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) = 2$.

Q.7 Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]$ tel que $k \neq \ell$.

(a) Montrer que X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{n}$.

(b) Déterminer la loi de $X_k X_\ell$ puis calculer le coefficient de corrélation r.

Q.8 On note S_n la variable aléatoire qui, à toute permutation $\sigma \in \Omega$, associe le nombre de points fixes de σ.

(a) Déterminer son espérance $E(S_n)$ et sa variance $V(S_n)$.

(b) Montrer que $P(S_n \geqslant 2) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $P(S_n \geqslant 3) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Partie III. Lois de Markov–Pólya

Soient a, b deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant initialement a boules noires et b boules blanches. On tire successivement n boules, selon une loi uniforme, avec la règle suivante :

on remet la boule tirée et on ajoute une boule de la même couleur.

Q.9 On note $X_1, \ldots, X_n$ les variables indicatrices $\mathbf{1}_{A_1}, \ldots, \mathbf{1}_{A_n}$ des évènements définis, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, par A_k : « la k-ième boule tirée est noire ».

(a) Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 1)$? En déduire que $X_2 \sim X_1$.

(b) Que doit valoir le coefficient de corrélation r pour ces variables ?

Q.10 Pour tout réel z, soit $((z)^{[m]})_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z + m) \times (z)^{[m]}.$$

(a) Vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$

(b) Démontrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}} \quad \text{où } s = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On pourra raisonner par récurrence.

(c) En déduire que, pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k \neq \ell$, le couple de variables aléatoires (X_k, X_ℓ) suit la même loi que (X_1, X_2).

Q.11 On considère la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Déterminer la loi de S_n en fonction de n, a et b.

(b) Quelle loi usuelle reconnaît-on lorsque $a = 1$ et $b = 1$?

Q.12 Pour tous réels x, y tels que $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, on pose :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} \times B(x, y+1).$$

(b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x, y)$.

(c) Montrer finalement que pour tout $s \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}} = \frac{B(a+s, b+n-s)}{B(a, b)}.$$