Neuvième devoir en temps libre

Solutions

Problème

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Dans tout le problème :

- les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P) ;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I. Coefficient de corrélation d'un schéma de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\{0,1\}$, suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X_k = 1) = p \quad \textit{et} \quad P(X_k = 0) = 1 - p.$$

On fait l'hypothèse qu'il existe un certain réel r, appelé coefficient de corrélation *tel que, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$,*

$$\frac{\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \textit{si } k = \ell \\ r & \textit{si } k \neq \ell \end{cases}$$

Q.1 Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont toutes égales.

Préciser de plus la loi de S_n dans chacun des deux cas précédents.

Solution.

(i) Dans ce cas $r = 0$ car $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$ par décorrélation des variables indépendantes pour $k \neq \ell$. Par somme de variables indépendantes :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np(1-p)$$

et enfin $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ d'après le théorème binomial.

(ii) Dans ce cas,

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_1)}{\sqrt{V(X_1)}^2} = \frac{V(X_1)}{V(X_1)} = 1.$$

et de plus $S_n = nX_1$, donc $V(S_n) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p)$. La loi de S_n, à valeurs dans $\{0, n\}$ est déterminée par :

$$P(S_n = 0) = P(X_1 = 0) = 1 - p, \quad P(S_n = n) = P(X_1 = 1) = p.$$

Q.2 On revient au cas général.

(a) Calculer la variance de $X_1/\sqrt{V(X_1)} - X_2/\sqrt{V(X_2)}$.

Solution. Les variables aléatoires $Y_1 = X_1/\sigma(X_1)$ et $Y_2 = X_2/\sigma(X_2)$ sont réduites (de variance 1). Ainsi,

$$\begin{aligned} V(Y_1 - Y_2) &= V(Y_1) + V(Y_2) - 2\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) \\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}}\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ &= 2(1-r). \end{aligned}$$

(b) Quelle est la valeur maximale possible pour le coefficient r ?

Solution. Une variance est toujours positive, donc $1 - r \geqslant 0$, c'est-à-dire $r \leqslant 1$. De plus la valeur $r = 1$ est bien atteinte dans le cas (ii) de la question précédente.

Q.3 On note S_n la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Montrer que sa variance est : $V(S_n) = np(1-p)(1+(n-1)r)$.

Solution. Les X_k sont toutes de même $p(1-p)$, donc :

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(1-p) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} rp(1-p) \\ &= np(1-p) + 2rp(1-p) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1}_{\frac{n(n-1)}{2}}, \end{aligned}$$

d'où la formule attendue par factorisation.

(b) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

Solution. Une variance est toujours positive et $np(1-p) > 0$, donc $1 + (n-1)r \geqslant 0$. Ceci équivaut à $r \geqslant -\dfrac{1}{n-1}$.

Q.4 On suppose dans cette question que $n = 2$.

(a) Exprimer $E(X_1X_2)$ en fonction de p et r. Montrer que r est égal à -1 si, et seulement si, $P\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = p(2p-1)$.

Solution. Par formule de König–Huygens,

$$E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = \operatorname{Cov}(X_1, X_2) = r\sqrt{V(X_1)V(X_2)}.$$

d'où $E(X_1X_2) = p^2 + rp(1-p)$. Or X_1X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $q = P(X_1 = 1, X_2 = 1)$, donc

$$P\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = p^2 + rp(1-p).$$

Pour conclure, on a bien $r = -1 \iff p^2 + rp(1-p) = 2p^2 - p$.

(b) Montrer que, dans ce cas, $P\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\right) = 1 - 3p + 2p^2$.

Solution. Notons $q = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$. Alors,

$$\begin{aligned}
1 - q &= P\left(\overline{(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)}\right) \\
&= P\left((X_1 = 1) \cup (X_2 = 1)\right) \\
&= P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) - P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \\
&= 2p - (2p^2 - p),
\end{aligned}$$

d'où finalement le résultat attendu : $q = 1 - 3p + 2p^2$.

(c) En déduire que si r vaut -1, alors $p = \dfrac{1}{2}$ et $P\left(X_1 + X_2 = 1\right) = 1$.

Solution. Supposons $r = -1$. Alors d'après les questions précédentes,

$$p(2p-1) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 1 - 3p + 2p^2 \geqslant 0.$$

La première condition donne déjà $2p - 1 \geqslant 0$ et la deuxième se traduit par $(1-p)(1-2p) \geqslant 0$, d'où $1 - 2p \geqslant 0$ aussi. L'unique solution est donc $p = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} P(X_1 = 1, X_2 = 1) & = & p(2p-1) = 0, \\ P(X_1 = 0, X_2 = 0) & = & (1-p)(1-2p) = 0. \end{cases}$$

Comme X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, on en déduit que

$$P(X_1 + X_2 = 2) = 0 \quad \text{et} \quad P(X_1 + X_2 = 0) = 0,$$

d'où finalement $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$ par complémentaire.

Q.5 On suppose dans cette question que $n \geqslant 3$ et que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = 1.$$

(a) Déterminer alors les valeurs de p et r en fonction de n.

Solution. Par linéarité de l'espérance,

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} E(X_k)}_{np} = E(1) = 1,$$

d'où $p = \dfrac{1}{n}$. De plus, S_n est ici constante donc $V(S_n) = 1$, c'est-à-dire que $np(1-p)(1+(n-1)r) = 0$. Comme $0 < p < 1$, on obtient :

$$r = -\frac{1}{n-1}.$$

(b) Quels sont les n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ de valeurs possibles pour $(X_1, \dots, X_n)$? Déterminer la loi conjointe de ces variables aléatoires.

Solution. La somme doit valoir 1, donc les seuls n-uplets possibles sont ceux constitués d'un élément 1 et de $n-1$ éléments 0 (dans un ordre quelconque). Il n'y a que n possibilités :

$$(1, 0, \dots, 0), \quad (0, 1, 0, \dots), \quad \dots, \quad (0, \dots, 0, 1).$$

Notons $A_n \subset \{0,1\}^n$ l'ensemble des ces n valeurs. On constate alors que l'évènement $(X_1 = 1)$ est réalisé pour un seul élément de A_n :

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{n}.$$

Plus généralement $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{1}{n}$ pour chaque élément de A_n. La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est donc uniforme sur A_n.

Partie II. Points fixes d'une permutation aléatoire

Dans cette partie uniquement, Ω est l'ensemble des *permutations* de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des bijections σ de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On munit Ω de la *probabilité uniforme*, notée P, et on définit les variables aléatoires $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ par :

$$\forall \sigma \in \Omega, \quad X_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q.6 Rappeler quel est le cardinal de Ω. Puis dénombrer :

(i) les permutations $\sigma \in \Omega$ telles que $\sigma(1) = 1$.

(ii) les permutations $\sigma \in \Omega$ telles que $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) = 2$.

Solution. L'ensemble Ω des permutations de $[\![1, n]\!]$ est de cardinal $\boxed{n!}$

(i) Une telle permutation est déterminée le choix d'une $n - 1$ liste $(\sigma(2), \dots, \sigma(n))$ d'éléments distincts de $[\![2, n]\!]$. Le nombre de permutations telles que $\sigma(1) = 1$ est donc $\boxed{(n-1)!}$

(ii) Une telle permutation est déterminée le choix d'une $n - 2$ liste $(\sigma(3), \dots, \sigma(n))$ d'éléments distincts de $[\![3, n]\!]$. Le nombre de permutations telles que $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) = 2$ est donc $\boxed{(n-2)!}$

Q.7 Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]$ tel que $k \neq \ell$.

(a) Montrer que X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{n}$.

Solution. La variable aléatoire X_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k = 1)$. Les issues $\sigma \in \Omega$ qui réalisent l'évènement $(X_k = 1)$ sont les permutations telles que $\sigma(k) = k$. En raisonnant comme ci-dessus, il y en a $(n-1)!$, et donc par probabilité uniforme

$$P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{X_k \sim \mathcal{B}(\tfrac{1}{n})}.$$

(b) Déterminer la loi de $X_k X_\ell$ puis calculer le coefficient de corrélation r.

Solution. De même, $X_k X_\ell$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k X_\ell = 1)$. Les issues qui réalisent l'évènement $(X_k X_\ell = 1)$ sont les permutations $\sigma \in \Omega$ telles que $\sigma(k) = k$ et $\sigma(\ell) = \ell$. En raisonnant comme précédemment, on en dénombre $(n-2)!$ et alors :

$$P(X_k X_\ell = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{X_k X_\ell \sim \mathcal{B}(\tfrac{1}{n(n-1)})}.$$

Par König–Huygens, on en déduit que $\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = \frac{1}{n(n-1)} - (\frac{1}{n})^2$:

$$\boxed{r = \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \frac{\frac{1}{n^2(n-1)}}{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{(n-1)^2}}$$

Q.8 On note S_n la variable aléatoire qui, à toute permutation $\sigma \in \Omega$, associe le nombre de points fixes de σ.

(a) Déterminer son espérance $E(S_n)$ et sa variance $V(S_n)$.

Solution. Par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n \times \frac{1}{n} = \boxed{1}$$

tandis que, d'après la formule de la première partie :

$$V(S_n) = np(1-p)(1 + (n-1)r) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \boxed{1}$$

(b) Montrer que $P(S_n \geqslant 2) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $P(S_n \geqslant 3) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Solution. La variable aléatoire est à valeurs positives. Sachant que $E(S_n) = 1$, on obtient par inégalité de Markov :

$$P(S_n \geqslant 2) \leqslant \frac{E(S_n)}{2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{P(S_n \geqslant 2) \leqslant \frac{1}{2}}.$$

Par inégalité de Bienaymé–Tchebychev, on trouve aussi :

$$\begin{aligned} P(S_n \geqslant 3) &= P(S_n - 1 \geqslant 2) \\ &\leqslant P\left(|S_n - 1| \geqslant 2\right) \\ &\leqslant \frac{V(S_n)}{2^2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{P(S_n \geqslant 3) \leqslant \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Partie III. Lois de Markov–Pólya

Soient a, b deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant initialement a boules noires et b boules blanches. On tire successivement n boules, selon une loi uniforme, avec la règle suivante :

on remet la boule tirée et on ajoute une boule de la même couleur.

Q.9 On note $X_1, \dots, X_n$ les variables indicatrices $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$ des évènements définis, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, par A_k : « la k-ième boule tirée est noire ».

(a) Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 1)$? En déduire que $X_2 \sim X_1$.

Solution.

- La première boule tirée est de loi uniforme sur l'ensemble des $a + b$ boules (dont a sont noires). La probabilité qu'elle soit noire est donc
$$P(X_1 = 1) = P(A_1) = \frac{a}{a+b}.$$
Or $X_1(\Omega) \subset \{0, 1\}$, donc X_1 suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{a}{a+b})$.
- Sachant l'évènement $(X_1 = 1)$, la loi conditionnelle de la deuxième boule est uniforme sur un ensemble de $a + b + 1$ boules, dont $a + 1$

sont noires. La loi conditionnelle de X_2 est donc $\mathcal{B}(\frac{a+1}{a+b+1})$.

- De même, la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 0)$ sera la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{a}{a+b+1})$.

  Par formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) \\
&= \frac{a}{a+b} \times \frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b+1} \\
&= \frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

Comme $X_2(\Omega) \subset \{0, 1\}$, on conclut : $\boxed{X_2 \sim X_1 \sim \mathcal{B}(\frac{a}{a+b})}$

(b) Que doit valoir le coefficient de corrélation r pour ces variables ?

Solution. Le calcul précédent donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
&= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{a(a+1)(a+b) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},
\end{aligned}$$

ce qui amène pour le coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)} = \boxed{\frac{1}{a+b+1}}.$$

Q.10 Pour tout réel z, soit $((z)^{[m]})_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(z)^{[0]} = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}.$$

(a) Vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$

Solution. On raisonne par récurrence :

- Pour $m = 0$, on a directement $(1)^{[0]} = 1 = 0!$ par définitions.
- Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $(1)^{[m]} = m!$ Au rang $m+1$:

$$(1)^{[m+1]} = (1+m) \times (1)^{[m]} = (m+1) \times m! = (m+1)!$$

(b) Démontrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}} \quad \text{où } s = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Solution.

- Pour $n = 1$, la formule est valide car

$$P(X_1 = 0) = \frac{b}{a+b} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) = \frac{a}{a+b},$$

où $b = (a)^{[0]}(b)^{[1]}$, $a = (a)^{[1]}(b)^{[0]}$ et $a + b = (a+b)^{[1]}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat est vrai. Au rang $n+1$, soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}$.

  Posons $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et notons $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)$. Sachant B_n, le tirage de la $n+1$-ième boule se fait dans une urne contenant $a+s$ boules boires et $b + (n-s)$ boules blanches.

  Dans le cas $x_{n+1} = 1$, on aura donc :

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 = x_1, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}\right) &= P((X_{n+1} = 1) \cap B_n) \\
&= P(X_{n+1} = 1 \mid B_n) P(B_n) \\
&= \frac{a+s}{a+b+n} \times \frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}} \\
&= \frac{(a)^{[s+1]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n+1]}},
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu car a somme passe à $s+1$ et $n-s=(n+1)-(s+1)$. De même dans le cas $x_{n+1}=0$:

$$P\left(X_1=x_1,\ldots,X_{n+1}=x_{n+1}\right)=\frac{b+(n-s)}{a+b+n}\times\frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}}$$
$$=\frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s+1]}}{(a+b)^{[n+1]}},$$

avec la somme qui reste à s et $n-s+1=(n+1)-s$.

- On conclut par principe de récurrence.

(c) En déduire que, pour tout $(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $k\neq\ell$, le couple de variables aléatoires (X_k,X_ℓ) suit la même loi que (X_1,X_2).

Solution. Soit $(X'_1,\ldots,X'_n)$ un n-uplet de variables aléatoire obtenu en permutant l'ordre des variables $(X_1,\ldots,X_n)$. Pour tout n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^2$, la question précédente montre que :

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=P(X'_1=x_1,\ldots,X'_n=x_n)$$

car ces probabilités ne dépendent que de la somme $s=\sum_{k=1}^{n}x_k$.

Il s'ensuit que $(X_1,\ldots,X_n)\sim(X'_1,\ldots,X'_n)$. Les images par la fonction $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,x_2)$ vérifient donc $(X_1,X_2)\sim(X'_1,X'_2)$. On conclut en choisissant la permutation de sorte que $X'_1=X_k$ et $X'_2=X_\ell$.

Q.11 On considère la variable aléatoire $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

(a) Déterminer la loi de S_n en fonction de n,a et b.

Solution. La variable S_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Soit $s\in[\![0,n]\!]$. Notons $A_n(s)$ l'ensemble des $(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ de somme s. Le choix d'un tel n-uplet est déterminé par le choix des s entiers $i\in[\![1,n]\!]$ tels que $x_i=1$. L'ensemble $A_n(s)$ est donc de cardinal $\binom{n}{s}$.

On conclut par union disjointe avec les questions précédente :

$$\begin{aligned}
P(S_n = s) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in A_n(s)} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = n) \\
&= \boxed{\binom{n}{s} \frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}}.}
\end{aligned}$$

Cette distribution de probabilité sur $[\![1, n]\!]$ détermine la loi de S_n.

(b) Quelle loi usuelle reconnaît-on lorsque $a = 1$ et $b = 1$?

Solution. Dans ce cas

$$\forall s \in [\![0, n]\!], \quad P(S_n = s) = \binom{n}{s} \times \frac{(1)^{[s]}(1)^{[n-s]}}{(2)^{[n]}}$$

où $(1)^{[s]} = s!$ et $(1)^{[n-s]} = (n-s)!$ comme déjà vu et de même

$$(2)^{[n]} = 2 \times (2+1) \times \cdots \times (2+n-1) = (n+1)!,$$

ce qui donne finalement :

$$\forall s \in [\![0, n]\!], \quad P(S_n = s) = \frac{n!}{s!(n-s)!} \times \frac{s!(n-s)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

On reconnaît la $\boxed{\text{loi uniforme sur } [\![0, n]\!].}$

Q.12 Pour tous réels x, y tels que $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, on pose :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} \times B(x, y+1).$$

Solution. Soient $(x, y) \in [1, +\infty[^2$. En considérant les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \dfrac{(1-t)^y}{-y}$, de classe $\mathscr{C}^1$, l'intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} B(x+1, y) &= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1}\, dt \\ &= \left[t^x \frac{(1-t)^y}{-y} \right]_0^1 - \int_0^1 x t^{x-1} \frac{(1-t)^y}{-y}\, dt \\ &= 0 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y\, dt \\ &= \boxed{\frac{x}{y} \times B(x, y+1).} \end{aligned}$$

(b) En déduire l'égalité : $\quad B(x, y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x, y).$

Solution. En développant le produit $(1-t)^y = (1-t) \times (1-t)^{y-1}$, on trouve par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\, dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt - \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1}\, dt,$$

ce qui donne d'après (a) :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1) = \frac{x}{y} \left[B(x, y) - B(x+1, y) \right].$$

Il vient $\boxed{(x+y)B(x+1, y) = xB(x, y)}$, d'où la formule attendue.

(c) Montrer finalement que pour tout $s \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{(a)^{[s]} (b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}} = \frac{B(a+s, b+n-s)}{B(a, b)}.$$

Solution. Soit $s \in [\![0, n]\!]$. On applique successivement la relation du

(a) avec $x = a + i$ et $y = b + n - 1 - i$ pour i allant de 0 à $s - 1$:

$$\begin{aligned} B(a+s, b+n-s) &= B(a, b+n) \times \frac{a+1}{b+n-1} \times \cdots \\ &= B(a, b+n) \times \prod_{i=0}^{s-1} \frac{a+i}{b+n-1-i} \\ &= B(a, b+n) \times \frac{(a)^{[s]}}{(b+n-s)^{[s]}}. \end{aligned}$$

On complète en appliquant la relation du (b) avec $x = a$ et $b = b + i$ pour i allant de 0 à $n - 1$:

$$\begin{aligned} B(a, b+n) &= B(a, b) \times \frac{b}{a+b} \times \cdots \\ &= B(a, b) \times \prod_{i=0}^{n-1} \frac{b+i}{a+b+i} \\ &= B(a, b) \times \frac{(b)^{[n]}}{(a+b)^{[n]}}. \end{aligned}$$

On obtient finalement (en vérifiant la dernière simplification) :

$$\boxed{\frac{B(a+s, b+n-s)}{B(a, b)} = \frac{(a)^{[s]}(b)^{[n]}}{(a+b)^{[n]}(b+n-s)^{[s]}} = \frac{(a)^{[s]}(b)^{[n-s]}}{(a+b)^{[n]}}.}$$