Premier devoir en temps libre

Solutions

Exercice 1

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes et produits suivants :

Q.1 $\displaystyle\sum_{k=2n}^{3n} k(4n-k)$

Solution. Par changement d'indice $j = k - 2n$ puis linéarité :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(2n+j)(2n-j) &= \sum_{j=0}^{n}(4n^2 - j^2) \\ &= 4n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(22n-1)}{6}}.\end{aligned}$$

Q.2 $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k+3)(2k+5)}$

Solution. C'est un télescopage sur deux rangs car $(2(k+2)+1) = 2k+5$ et $2(k+2)-1 = 2k+3$. On peut se ramener à deux télescopages simples :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k+3)(2k+5)} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k+3)(2k+1)} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+3)(2k+1)}{(2k+5)(2k+3)} \\ &= \frac{3\times 1}{(2n+3)(2n+1)} \times \frac{5\times 3}{(2n+5)(2n+3)} \\ &= \boxed{\frac{45}{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}}.\end{aligned}$$

Q.3 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n}(-1)^{\max(k,2n)}$

Solution. On regroupe les termes en deux paquets selon que $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ ou $2n+1 \leqslant k \leqslant 3n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^{2n}+\sum_{k=2n+1}^{3n}(-1)^k &= n(-1)^{2n}+(-1)^{2n+1}\frac{1-(-1)^n}{2}\\ &= \boxed{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n}.\end{aligned}$$

Autrement dit, on obtient n si n est pair et $n-1$ si n est impair.

Q.4 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}2^i$

Solution. La somme porte que les couples (i,j) tels que $(0 \leqslant i \leqslant n$ et $i \leqslant j \leqslant n)$, ce qui équivaut à $(0 \leqslant j \leqslant n$ et $0 \leqslant i \leqslant j)$. On intervertit l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}2^i &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}2^i\\ &= \sum_{j=0}^{n}(1+2)^j\\ &= \boxed{\frac{3^{n+1}-1}{2}}.\end{aligned}$$

Exercice 2

Rappel : un réel x est *rationnel* s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$. Il est dit *irrationnel* sinon. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Q.5 Soient x, y deux réels. Montrer que :

$$(x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies (x+y \in \mathbb{Q} \text{ et } x \times y \in \mathbb{Q}).$$

Solution. Supposons que $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$. Montrons que $x+y \in \mathbb{Q}$. Par hypothèse, on dispose d'entiers a, b, c, d tels que b, d sont non nuls et :

$$x = \frac{a}{b}, \qquad y = \frac{c}{d} \qquad \text{d'où} \qquad x+y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Par sommes et produits, $ad+bc$ est un entier et bd est un entier non nul. Donc $x+y \in \mathbb{Q}$. De même, $x \times y = \dfrac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$.

Q.6 Un produit d'irrationnels est-il toujours irrationnel ? Une somme d'irrationnels est-elle toujours irrationnelle ? *(indication : on rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel)*

Solution. Considérons $x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$ pour obtenir des contre-exemples :

- $\sqrt{2}$ est irrationnel ;
- $-\sqrt{2}$ est irrationnel aussi (sinon son opposé serait rationnel) ;
- la somme $x + y = 0 = \dfrac{0}{1}$ est rationnelle ;
- le produit $x \times y = -2 = \dfrac{-2}{1}$ est rationnel.

Q.7 Soit x un réel. Montrer que si x^2 est irrationnel, alors x est irrationnel aussi.

Solution. On a vu que le produit de deux rationnels a, b est toujours rationnel. En particulier pour $x = a$ et $x = b$, on a donc :

$$x \in \mathbb{Q} \implies x^2 \in \mathbb{Q}.$$

Par passage à la contraposée, il vient : $\boxed{x^2 \notin \mathbb{Q} \implies x \notin \mathbb{Q}.}$

Q.8 Soient x, y réels. Montrer par l'absurde que : $(x \notin \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies x - y \notin \mathbb{Q}$.

Solution. Raisonnons par l'absurde : on suppose que l'implication est fausse, c'est-à-dire que sa négation $(x \notin \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q})$ et $x - y \in \mathbb{Q}$ est vraie. On remarque alors que $x = (x-y) + y$ est la somme de deux rationnels et donc $x \in \mathbb{Q}$ d'après la question **a)**, ce qui contredit l'hypothèse $x \notin \mathbb{Q}$. On conclut par l'absurde.

Problème

Préliminaires

Q.9 Déterminer tous les nombres de Fibonacci inférieurs à 100.

Solution.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Le prochain nombre de Fibonacci est $55 + 89 = 144$, qui dépasse 100.

Q.10 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre F_n est un entier naturel non nul.

Solution. On montre ceci par récurrence double :

- C'est clairement vrai pour F_1 et F_2.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n et F_{n+1} sont des entiers naturels non nuls. Alors F_{n+2} est aussi un entier naturel par somme, et $F_{n+2} \geqslant 1+1$ donc en particulier $F_{n+2} \neq 0$.

Q.11 Montrer que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2 et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n-1.$$

Solution. Pour tout $n \geqslant 2$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} > 0$ d'après la question précédente. La suite $(F_n)_{n\geqslant 2}$ est donc strictement croissante. La proposition $F_n \geqslant n-1$ est clairement vraie pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$. De plus, pour tout $n \geqslant 2$,

$$F_n \geqslant n-1 \implies F_{n+1} \geqslant n-1+F_{n-1} \geqslant (n+1)-1.$$

Par récurrence sur $n \geqslant 2$, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

Q.12 On note P la proprosition suivante : $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant 2,\ (F_k \leqslant n \implies F_{k+1} \leqslant n)$.

(a) Déterminer la négation de P.

Solution. La négation est : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geqslant 2,\ (F_k \leqslant n$ et $F_{k+1} > n)$.

(b) Montrer que si P est vraie, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \geqslant 2,\ F_k \leqslant n$.

Solution. Supposons que P est vraie. On dispose donc d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geqslant 2, \ (F_k \leqslant n \implies F_{k+1} \leqslant n).$$

Puisque $F_2 = 1$, la proprosition $F_2 \leqslant n$ est vraie. Par récurrence, on a donc :

$$\forall k \geqslant 2, \ F_k \leqslant n.$$

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $F_k \leqslant n < F_{k+1}$ et que cet entier est unique.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Existence.* Supposons que P est vraie et cherchons une contradiction : d'après la question précédente, on dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_k \leqslant n$ quel que soit $k \geqslant 2$. Donc en particulier $F_{n+2} \leqslant n$. Mais ceci est absurde car on sait que $F_{n+2} \geqslant (n+2) - 1$. On en déduit que P est fausse, d'où :

$$(F_k \leqslant n \text{ et } F_{k+1} > n) \iff F_k \leqslant n < F_{k+1}.$$

- *Unicité.* Soient $k \geqslant 2$ et $\ell \geqslant 2$ deux entiers naturels non nuls tels que $F_k \leqslant n < F_{k+1}$ et $F_\ell \leqslant n < F_{\ell+1}$. Alors de deux choses l'une :

$$\begin{cases} F_k < F_{\ell+1}, & \text{donc } k < \ell + 1 \\ F_\ell < F_{k+1}, & \text{donc } \ell < k + 1 \end{cases}$$

par stricte croissance de $(F_n)_{n \geqslant 2}$. Il vient donc $k \leqslant \ell$ et $\ell \leqslant k$, d'où $k = \ell$.

Diagonales de Pascal

Q.13 En effectuant le changement d'indice $k' = k + 1$ dans la somme D_n, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n + D_{n+1} = D_{n+2}.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $k' = k + 1$, on a $k = k' - 1$ d'où :

$$D_n = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n - (k'-1)}{k'-1} = \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n+1-k'}{k'-1}.$$

Puisque $\binom{n+1}{-1} = 0$ par définition, on peut aussi écrire

$$D_n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1}.$$

En ajoutant D_{n+1}, la formule de Pascal donne alors :

$$D_n + D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n+1-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k} \right] = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2-k}{k}.$$

Ceci correspond bien à D_{n+2} car

$$\binom{n+2-(n+2)}{n+2} = \binom{0}{n+2} = 0.$$

Q.14 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = F_{n+1}$.

Solution. On raisonne par récurrence double.

- Montrons que $D_0 = F_1$ et $D_1 = F_2$:

$$D_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{k} = \binom{0}{0} = 1, \qquad D_1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D_n = F_{n+1}$ et $D_{n+1} = F_{n+2}$. Alors, d'après la question précédente et la définition de la suite de Fibonacci,

$$D_{n+2} = D_n + D_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3},$$

ce qui donne bien l'égalité au rang $n+2$.

Formule de Binet

Q.15 Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ d'inconnue x admet deux solutions réelles, notées φ et ψ, qui vérifient $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. Calculer la somme $\varphi + \psi$ et le produit $\varphi\psi$.

Solution. L'équation du second degré $x^2 - x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5$. Ses solutions sont donc

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

Elles satisfont bien l'égalité $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. De plus :

$$\boxed{\varphi + \psi = 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\varphi\psi = \frac{1^2 - (\sqrt{5})^2}{2^2} = -1}.$$

Q.16 On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $G_n = F_{n+1} - \varphi F_n$.

(a) Montrer que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison ψ.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les calculs précédents :

$$F_{n+2} - \varphi F_{n+1} = (1-\varphi)F_{n+1} + F_n = \psi F_{n+1} - \varphi\psi F_n = \psi(F_{n+1} - \varphi F_n).$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G_{n+1} = \psi G_n}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\frac{F_n}{\varphi^n} - \frac{F_0}{\varphi^0} = \frac{1}{\varphi}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^k.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique, donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad F_{k+1} - \varphi F_k = \psi^k(F_1 - \varphi F_0) = \psi^k.$$

En divisant par φ^{k+1}, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{k+1}}{\varphi^{k+1}} - \frac{F_k}{\psi^k} = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^k.$$

La formule demandée s'ensuit alors puisque, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{F_{k+1}}{\varphi^{k+1}} - \frac{F_k}{\varphi^k}\right) = \frac{F_n}{\varphi^n} - \frac{F_0}{\varphi^0}.$$

Q.17 Donner finalement une expression de F_n en fonction de n.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\frac{F_n}{\varphi^n} = \frac{1}{\varphi} \times \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}{1 - \frac{\psi}{\varphi}}.$$

En utilisant le fait que $\varphi - \psi = \sqrt{5}$, on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n\right).}$$

Théorème Z

Q.18 Trouver une Z-décomposition pour chaque entier de 1 à 13.

Solution.

$1 = F_2$	$2 = F_3$	$3 = F_3 + F_2$	$4 = F_4 + F_2$	$5 = F_5$
$6 = F_5 + F_2$	$7 = F_5 + F_3$	$8 = F_6$	$9 = F_6 + F_2$	$10 = F_6 + F_3$
$11 = F_6 + F_4$	$12 = F_6 + F_4 + F_2$	$13 = F_7$		

Q.19 Démontrer par récurrence forte que tout $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une Z-décomposition où k_1 est déterminé par l'encadrement $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$.

Solution.

- Pour $n = 1$, on a $1 = F_2$ et $F_2 \leqslant 1 < F_3$ est bien vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout entier $m \in [\![1, n]\!]$ admet au moins une Z-décomposition. Considérons l'entier $n + 1$. On dipose d'un entier $k_1 >> 0$ unique tel que $F_{k_1} \leqslant n + 1 < F_{k_1+1}$ d'après les préliminaires.

  Si $F_{k_1} = n + 1$, ceci donne déjà une Z-décomposition. Sinon, $m = n + 1 - F_{k_1}$ vérifie $m \in [\![1, n]\!]$, donc m admet une Z-décomposition $m = F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$ telle que $F_{k_2} \leqslant m < F_{k_2+1}$. On en déduit la Z-décomposition suivante pour $n + 1$:

  $$n + 1 = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}.$$

  Vérifions que $k_1 >> k_2$: on sait que $F_{k_2} \leqslant n + 1 - F_{k_1}$ et donc $F_{k_1} + F_{k_2} \leqslant n + 1$. Par ailleurs $n + 1 < F_{k_1+1}$ et $F_{k_1+1} = F_{k_1} + F_{k_1-1}$, donc $F_{k_2} < F_{k_1-1}$. Par croissance de la suite, on en déduit que $k_2 < k_1 - 1$, d'où $\boxed{k_1 >> k_2}$.

Q.20 Démontrer de plus que toute Z-décomposition d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ vérifie nécessairement l'encadrement $F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}$ et qu'elle est unique.

Solution. On raisonne à nouveau par récurrence forte.

- Pour $n = 1$, la seule décomposition possible est $1 = F_2$ car les nombres de Fibonacci suivants valent au moins 2. On a bien $F_2 \leqslant 1 < F_3$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour tout $m \in [\![1, n]\!]$ et démontrons-le au rang $n+1$. Soit une Z-décomposition $n+1 = F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$.

  L'inégalité $F_{k_1} \leqslant n+1$ est claire. Étudions l'autre :

  (i) Si $p > 1$, alors $F_{k_2} + \cdots + F_{k_p}$ est une Z-décomposition de $n+1-F_{k_1}$ donc par hypothèse de récurrence $n+1-F_{k_1} < F_{k_2+1}$. Or $k_1 >> k_2$ donc $F_{k_2+1} \leqslant F_{k_1-1}$ par croissance, ce qui donne $n+1 < F_{k_1-1} + F_{k_1}$, d'où $n+1 < F_{k_1+1}$.

  (ii) Si $p = 1$, alors $F_{k_1} = n+1$; l'encadrement $F_{k_1} \leqslant n+1 < F_{k_1+1}$ est trivial.

  Étant donnée une autre Z-décomposition $n+1 = F_{\ell_1} + \cdots + F_{\ell_q}$, on aura de même $F_{\ell_1} \leqslant n+1 < F_{\ell_1+1}$ et donc $\ell_1 = k_1$ nécessairement. L'égalité

  $$F_{k_2} + \cdots + F_{k_p} = F_{\ell_2} + \cdots + F_{\ell_q}$$

  montre alors par hypothèse de récurrence que ces deux Z-décompositions sont égales, d'où l'unicité pour la Z-décomposition de $n+1$ aussi.