Premier devoir surveillé

23 septembre 2022, 3 heures

I Exercice

Q.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers a_n, b_n tels que

$$(\sqrt{3}-1)^n = a_n - b_n\sqrt{3}.$$

Q.2 En déduire que : $\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \implies \left(\exists q \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{q} \leqslant \left(\sqrt{3}-1\right)^n\right)$.

Q.3 Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3}-1\right)^n$? Prouver alors par contraposée que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Q.4 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'unicité du couple (a_n, b_n) de la première question.

Q.5 Justifier finalement les égalités suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = (-1)^n \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{\frac{k}{2}} \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 3^{\frac{k-1}{2}}$$

II Exercice – Système linéaire

Soient α, β deux réels de l'intervalle $]0,1[$.

Q.6 Résoudre le système suivant d'inconnues (x, y) réelles en fonction de (α, β) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ \beta x & + & (\alpha-1)y & = & \alpha\beta \\ (\beta-1)x & + & \alpha y & = & \alpha\beta. \end{array}\right.$$

Q.7 *Situation géométrique.* Dans un repère orthonormé du plan, on considère le carré de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ et $D(0,1)$. On note M le point de coordonnées (α, β) et I, J, K, L les projetés orthogonaux de M sur les 4 côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du carré.

(a) Tracer une figure et préciser les coordonnées de I, J, K et L en fonction de α, β.

(b) Déterminer des équations cartésiennes des droites (AC), (IJ), (LK).

(c) Montrer que ces droites sont concourantes ou toutes les trois parallèles.

III Exercice

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(a)+f(b)\big| = \big|a+b\big| \tag{$\star$}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{id}(x) = x$ et $\mathrm{op}(x) = -x$.

Q.8 Ces fonctions id et op vérifient-elles la relation $(\star)$?

Q.9 Étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque, on considère les propositions :

P_1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|f(x)\big| = \big|x\big|$;

P_2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x\big)$;

P_3 : $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\big)$.

(a) En prouvant vos réponses :

i. P_1 est-elle équivalente à P_2 quelle que soit la fonction f ?

ii. P_1 est-elle équivalente à P_3 quelle que soit la fonction f ?

(b) Écrire la négation de la proposition P_3.

Q.10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation $(\star)$.

(a) Montrer que $f(0) = 0$.

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|f(x)\big| = \big|x\big|$.

(c) Démontrer par l'absurde que f vérifie la proposition P_3.

Q.11 Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $(\star)$.

IV Problème – Nombre de dérangements

L'objectif de l'exercice est d'étudier la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_0 = 1$ et $d_1 = 0$ puis, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$d_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{k!}.$$

Q.12 *Préliminaires.*

(a) Calculer d_2, d_3, d_4, d_5.

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme d_n est un entier naturel.

(c) Établir, pour tout $n \geqslant 1$, la relation :

$$d_{n+2} = (n+1)\left(d_{n+1} + d_n\right).$$

Q.13 *Encadrement.* Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ (n-1)! \leqslant d_n \leqslant n!$

Q.14 *Une formule explicite.* Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = d_{n+1} - (n+1)d_n$.

(a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = (-1)^{n+1}$.

(b) En déduire par télescopage que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{d_n}{n!}$$

(c) Prouver finalement la formule suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Q.15 *Une formule binomiale.*

(a) Vérifier que :

$$\sum_{n=k}^{p} (-1)^{n-k} \binom{p}{k} \binom{p-k}{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} d_n = p!$$