Premier devoir surveillé

Solutions

I Exercice – Système linéaire

Soient α, β deux réels de l'intervalle $]0, 1[$.

Q.1 Résoudre le système suivant d'inconnues (x, y) réelles en fonction de (α, β) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ \beta x & + & (\alpha-1)y & = & \alpha\beta \\ (\beta-1)x & + & \alpha y & = & \alpha\beta. \end{array}\right.$$

Solution. Par opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - \beta L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (\beta - 1)L_1$, ce système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ & & (\alpha+\beta-1)y & = & \alpha\beta \\ & & (\alpha+\beta-1)y & = & \alpha\beta. \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ & & (\alpha+\beta-1)y & = & \alpha\beta \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\alpha + \beta = 1$, la deuxième équation $0 = \alpha\beta$ est toujours fausse car α, β sont strictement positifs. Le système n'admet pas de solution dans ce cas.

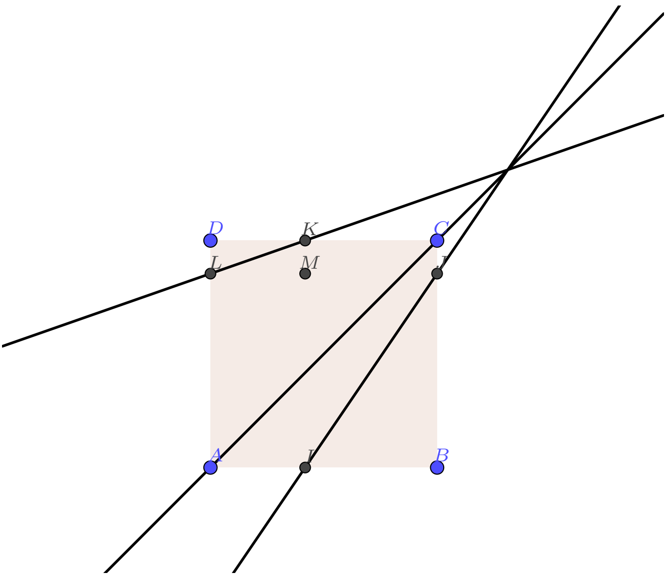
- Si $\alpha + \beta \neq 1$, on obtient directement une solution unique :

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}, \ \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1} \right).$$

Q.2 *Situation géométrique.* Dans un repère orthonormé du plan, on considère le carré de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ et $D(0,1)$. On note M le point de coordonnées (α, β) et I, J, K, L les projetés orthogonaux de M sur les 4 côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ du carré.

(a) Tracer une figure et préciser les coordonnées de I, J, K et L en fonction de α, β.

Solution.



Les coordonnées des projetés sont :

$$\boxed{I(\alpha,0), \quad J(1,\beta), \quad K(\alpha,1), \quad L(0,\beta)}.$$

(b) Déterminer des équations cartésiennes des droites (AC), (IJ), (LK).

Solution.

- La droite (AC) a pour équation :

$$y - y_A = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A), \quad \text{i.e.} \quad y - 0 = \frac{1-0}{1-0}(x-0),$$

ce qui équivaut à : $\boxed{x - y = 0}$.

- La droite (IJ) a pour équation :

$$y - 0 = \frac{\beta - 0}{1 - \alpha}(x - \alpha),$$

ce qui équivaut à : $\boxed{\beta x - (1-\alpha)y = \alpha\beta}$.

- De même, la droite (KL) a pour équation :

$$y - 1 = \frac{\beta - 1}{0 - \alpha}(x - \alpha),$$

ce qui équivaut à : $\boxed{(\beta - 1)x - \alpha y = \alpha\beta}$.

(c) Montrer que ces droites sont concourantes ou toutes les trois parallèles.

Solution. L'intersection des trois droites correspond à l'ensemble des solutions du système étudié précédemment :

- Si $\alpha + \beta \neq 1$, il existe $\boxed{\text{un unique point d'intersection}}$.
- Supposons que $\alpha + \beta = 1$. L'intersection est alors vide, mais ça ne suffit pas à conclure. En fait $\alpha - 1 = -\beta$ et $\beta - 1 = -\alpha$ dans ce cas. Comme α, β sont non nuls, les trois droites admettent les équations :

$$x - y = 0, \qquad x - y = \alpha, \qquad x - y = -\beta.$$

Ces équations sont deux à deux incompatibles, donc :

$$\boxed{\text{les droites sont deux à deux parallèles.}}$$

II Exercice – Irrationnalité de $\sqrt{3}$

Q.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers a_n, b_n tels que

$$(\sqrt{3} - 1)^n = a_n - b_n\sqrt{3}.$$

Solution. On montre ceci par récurrence :

- *Initialisation.* Pour $n = 0$, on a directement $(\sqrt{3} - 1)^0 = 1$ donc il suffit de poser

$a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe a_n, b_n entiers satisfaisant $(\sqrt{3}-1)^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Alors, au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-1\right)^n\left(\sqrt{3}-1\right) &= \left(a_n - b_n\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\\ &= (-a_n + 3b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Posons $a_{n+1} = -a_n - 3b_n$ et $b_{n+1} = -a_n - b_n$. Ce sont bien deux entiers tels que $\left(\sqrt{3}-1\right)^{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{3}$.

Q.4 En déduire que : $\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \implies \left(\exists q \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{q} \leqslant (\sqrt{3}-1)^n\right)$.

Solution. Supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors p, q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve alors :

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^n = a_n - b_n\frac{p}{q} = \frac{a_n q - b_n p}{q}.$$

Le numérateur $a_n q - b_n p$ vaut au moins 1 car c'est un entier et il est strictement positif (étant donné que $\sqrt{3} - 1 > 0$).

Q.5 Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3}-1)^n$? Prouver alors par contraposée que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Solution. La limite est nulle car c'est une suite géométrique dont la raison vérifie $|\sqrt{3}-1| < 1$. Considérons la contraposée de l'implication précédente :

$$\left(\forall q \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N},\ \left(\sqrt{3}-1\right)^n < \frac{1}{q}\right) \implies \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Comme $\dfrac{1}{q} > 0$, on aura $\left(\sqrt{3}-1\right)^n < \dfrac{1}{q}$ pour tout n assez grand compte tenu de la limite nulle.
D'après la contraposée, on en déduit bien que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Q.6 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'unicité du couple (a_n, b_n) de la première question.

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et (a_n, b_n), (a'_n, b'_n) deux couples solutions.

Alors $a_n - a'_n = (b_n - b'_n)\sqrt{3}$ par différence.

Nécessairement $b_n - b'_n = 0$, car sinon $\sqrt{3} = \dfrac{a_n - a'_n}{b_n - b'_n}$ serait rationnel.

Donc $a_n - a'_n = 0 \times \sqrt{3} = 0$ aussi.

Conclusion : $\boxed{a_n = a'_n \text{ et } b_n = b'_n}$.

Q.7 Justifier finalement les égalités suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = (-1)^n \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{\frac{k}{2}} \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 3^{\frac{k-1}{2}}$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{3}\right)^k (-1)^{n-k}.$$

On regroupe alors les termes en deux paquets :

- ceux avec k pair, de sorte que

$$\left(\sqrt{3}\right)^k = 3^{k/2} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad (-1)^{n-k} = (-1)^n;$$

- ceux avec k impair, de sorte que $\left(\sqrt{3}\right)^k = 3^{(k-1)/2}\sqrt{3}$ avec cette fois

$$3^{(k-1)/2} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad (-1)^{n-k} = -(-1)^n.$$

On obtient alors :

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)^n = (-1)^n \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 3^{\frac{k}{2}} - (-1)^n \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 3^{\frac{k-1}{2}} \times \sqrt{3}.$$

Comme ces deux sommes sont entières, on peut identifier a_n et b_n par unicité.

III Exercice – Recherche de fonction

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(a)+f(b)\big| = \big|a+b\big| \tag{$\star$}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{id}(x) = x$ et $\mathrm{op}(x) = -x$.

Q.8 Ces fonctions id et op vérifient-elles la relation $(\star)$?

Solution. Oui : quel que soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|\mathrm{id}(a)+\mathrm{id}(b)\big| = \big|a+b\big| \quad \text{et} \quad \big|\mathrm{op}(a)+\mathrm{op}(b)\big| = \big|-(a+b)\big| = \big|a+b\big|.$$

Q.9 Étant donnée une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque, on considère les propositions :

P_1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|f(x)\big| = \big|x\big|$;

P_2 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x\big)$;

P_3 : $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\big)$ ou $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x\big)$.

(a) En prouvant vos réponses :

i. P_1 est-elle équivalente à P_2 quelle que soit la fonction f ?

ii. P_1 est-elle équivalente à P_3 quelle que soit la fonction f ?

Solution. Rédigeons très (trop) soigneusement pour l'exemple !

i. *Soit f une fonction.*

- *Supposons P_1 et montrons P_2 :*
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Par P_1, on sait que $|f(x)| = |x|$.
  Donc $f(x) = |x|$ ou $f(x) = -|x|$.
  Or $-(-x) = x$ donc $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$ *dans tous les cas.*
- *Supposons P_2 et montrons P_1 :*
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Par P_2, on sait que $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.
  Dans le premier cas, $|f(x)| = |x|$ directement.
  Dans le second cas, $|f(x)| = |-x| = |x|$.
  Donc $|f(x)| = |x|$ *dans tous les cas.*

Conclusion : $\boxed{(P_1 \iff P_2) \text{ est vraie quelle que soit } f.}$

ii. *Posons* $f : x \mapsto |x|$. Montrons que c'est un contre-exemple :

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. Alors $|f(x)| = \big||x|\big| = |x|$ car $|x| \geqslant 0$. Donc P_1 est vraie.
- Cependant, P_3 est fausse car sinon on aurait $f(-1) = -1$ (pour $x = -1$) ou $f(1) = -1$ (pour $x = 1$), c'est-à-dire que $1 = -1$ dans les deux cas [absurde].

Conclusion : $\boxed{P_1 \text{ et } P_3 \text{ ne sont pas équivalentes pour cette fonction.}}$

[Plus précisément, c'est l'implication $P_1 \implies P_3$ qui est fausse.]

(b) Écrire la négation de la proposition P_3.

Solution. $\boxed{(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -x)}$

Q.10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation $(\star)$.

(a) Montrer que $f(0) = 0$.

Solution. L'égalité $\big|f(a) + f(b)\big| = \big|a + b\big|$ est vraie en particulier pour $a = b = 0$, donc $|f(0) + f(0)| = |0 + 0| = 0$. Alors $2f(0) = 0$, d'où $\boxed{f(0) = 0}$.

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big|f(x)\big| = \big|x\big|$.

Solution. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $\big|f(a)+f(b)\big| = \big|a+b\big|$ est vraie en particulier pour $a = b = x$, donc $\big|f(x)+f(x)\big| = \big|x+x\big|$. Alors $|2f(x)| = |2x|$, c'est-à-dire que $2|f(x)| = 2|x|$ car $2 \geqslant 0$. Donc finalement $\boxed{|f(x)| = |x|}$.

(c) Démontrer par l'absurde que f vérifie la proposition P_3.

Solution. Supposons qu'il existe x_1 et x_2 réels tels que $f(x_1) \neq x_1$ et $f(x_2) \neq -x_2$. Alors nécessairement $f(x_1) = -x_1$ et $f(x_2) = x_2$ d'après la question précédente. La relation $(\star)$ donne donc $|x_2 - x_1| = |x_1 + x_2|$, c'est-à-dire que $x_2 - x_1 = x_1 + x_2$ ou $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$. Autrement dit, $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Dans les deux cas on aurait $f(0) \neq 0$, ce qui est absurde.

Conclusion : non(P_3) est fausse, donc $\boxed{P_3 \text{ est vraie}}$.

Q.11 Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient $(\star)$.

Solution. Raisonnons par analyse-synthèse :

- *Analyse.* Soit f une solution. Alors f vérifie P_3 d'après la question précédente. Donc $f = \mathrm{id}$ ou $f = \mathrm{op}$.
- *Synthèse.* On a déjà vérifié que id et op sont des solutions.

Conclusion : $\boxed{\text{les seules solutions sont id et op.}}$

IV Problème – Nombre de dérangements

L'objectif de l'exercice est d'étudier la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_0 = 1$ et $d_1 = 0$ puis, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$d_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{k!}.$$

Q.12 *Préliminaires.*

(a) Calculer d_2, d_3, d_4, d_5.

Solution. On applique la formule pour $n = 0$, $n = 1$, …, $n = 4$:

$$\begin{aligned}
d_2 &= 1!\left(\frac{d_0}{0!}\right) = \boxed{1} \\
d_3 &= 2!\left(\frac{d_0}{0!} + \frac{d_1}{1!}\right) = 2 + 0 = \boxed{2} \\
d_4 &= 3!\left(\frac{d_0}{0!} + \frac{d_1}{1!} + \frac{d_2}{2!}\right) = 6 + 0 + 3 = \boxed{9} \\
d_5 &= 4!\left(\frac{d_0}{0!} + \frac{d_1}{1!} + \frac{d_2}{2!} + \frac{d_3}{3!}\right) = 24 + 0 + 12 + 8 = \boxed{44}
\end{aligned}$$

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme d_n est un entier naturel.

Solution.

Raisonnons par *récurrence forte* :

- *Initialisation.* On sait que $d_0 = 1$ et $d_1 = 0$, qui sont bien des entiers naturels.
- *Hérédité.* Soit $n \geqslant 1$ [attention, la relation n'est pas vraie pour $n = 0$].

Supposons que $d_0, d_1, \ldots, d_n$ sont des entiers naturels. On sait que :

$$d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} d_k$$

par linéarité. On remarque alors que pour tout $k \in [\![0, k-1]\!]$

$$\frac{n!}{k!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \in \mathbb{N}.$$

Donc $d_{n+1} \in \mathbb{N}$ aussi par produits et sommes d'entiers naturels.

Conclusion : $\boxed{\text{par principe de récurrence, } d_n \in \mathbb{N} \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.}$

(c) Établir, pour tout $n \geqslant 1$, la relation :

$$d_{n+2} = (n+1)\left(d_{n+1} + d_n\right).$$

Solution. *Soit* $n \geqslant 1$. On exprime d_{n+1} et d_{n+2} par la relation de récurrence aux rangs n et $n+1$:

$$d_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{k!} \quad \text{et} \quad d_{n+2} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!}.$$

Remarquons que $(n+1)! = (n+1)n!$ et séparons le dernier terme :

$$d_{n+2} = (n+1)\left[n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{k!} + \frac{n! d_n}{n!}\right].$$

On reconnaît d_{n+1}, d'où la relation voulue après simplification.

Q.13 *Encadrement.* Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \ (n-1)! \leqslant d_n \leqslant n!$

Solution. Raisonnons par récurrence *double* :

- *Initialisation.* $d_2 = 1$ et $d_3 = 2$ donc $1! \leqslant d_2 \leqslant 2!$ et $2! \leqslant d_3 \leqslant 3!$ sont vraies.
- *Hérédité.* Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $(n-1)! \leqslant d_n \leqslant n!$ et $n! \leqslant d_{n+1} \leqslant (n+1)!$.
  La minoration $d_{n+2} \geqslant (n+1)!$ s'obtient facilement car :

  $$(n+1)\left(d_{n+1} + d_n\right) \geqslant (n+1)\big(n! + (n-1)!\big) \geqslant (n+1)n!$$

La majoration $d_{n+2} \leqslant (n+2)!$ est un peu plus subtile :

$$\begin{aligned}(n+1)\left(d_{n+1}+d_n\right) &\leqslant (n+1)\big((n+1)!+n!\big)\\ &\leqslant (n+1)\underbrace{\big((n+1)+1\big)}_{n+2}n! \quad (\text{car } (n+1)! = (n+1)n!)\end{aligned}$$

Au rang $n+2$, on a donc bien $\boxed{(n+1)! \leqslant d_{n+2} \leqslant (n+2)!}$.

Q.14 *Formule explicite.* Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = d_{n+1} - (n+1)d_n$.

(a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = (-1)^{n+1}$.

Solution. Soit $n \geqslant 1$. Par définition de la suite :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= d_{n+2} - (n+2)d_{n+1}\\ &= (n+1)\big(d_{n+1}+d_n\big) - (n+2)d_{n+1}\\ &= (n+1)d_n - d_{n+1}\\ &= -u_n\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc géométrique de raison (-1). En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n-1}u_1$$

et on conclut sachant que $u_1 = d_2 - 2d_1 = 1$ et $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$.

(b) En déduire par télescopage que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{d_n}{n!}$$

Solution. C'est une conséquence directe de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{d_{k+1}}{(k+1)!} - \underbrace{\frac{(k+1)d_k}{(k+1)!}}_{\frac{d_k}{k!}}\right] = \frac{d_n}{n!} - \underbrace{\frac{d_1}{1!}}_{0}.$$

(c) Établir alors la formule suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par changement d'indice $j = k+1$, on sait déjà que

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{j=2}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

En effet, les termes supplémentaire s'annulent : $(-1)^0/0! + (-1)^1/1! = 0$.

La multiplication par $n!$ donne par linéarité :

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{j!} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!}(n-j)! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}(n-j)!$$

On conclut alors avec le changement d'indice $k = n - j$ (retournement).

Q.15 *Inversion binomiale.* Soit p un entier naturel.

(a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant p$, vérifier que :

$$\sum_{n=k}^{p} (-1)^{n-k} \binom{p}{k} \binom{p-k}{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution. Soit $k \in [\![0, p]\!]$. Par linéarité puis changement d'indice $j = n - k$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{p} (-1)^{n-k} \binom{p}{k} \binom{p-k}{n-k} &= \binom{p}{k} \sum_{n=k}^{p} \binom{p-k}{n-k} (-1)^{n-k} \\ &= \binom{p}{k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j} (-1)^j. \end{aligned}$$

On reconnaît un binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j} (-1)^j = \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j} (-1)^j \, 1^{(p-k)-j} = 0^{p-k},$$

qui vaut 1 si $p - k = 0$ et 0 sinon. Comme $\binom{p}{k} = 1$ si $k = p$, on conclut.

(b) Démontrer alors la relation :

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} d_n = p!$$

Solution. On substitue à d_n son expression explicite :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}d_n &= \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{p}{n}\binom{n}{k}k! \\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{n=k}^{p}(-1)^{n-k}\binom{p}{n}\binom{n}{k}k!,\end{aligned}$$

où le changement d'ordre de sommation est justifié par l'équivalence :

$$\big(0 \leqslant n \leqslant p \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant n\big) \iff \big(0 \leqslant k \leqslant p \text{ et } k \leqslant n \leqslant p\big).$$

Afin d'utiliser la question précédente, on remarque alors que :

$$\binom{p}{n}\binom{n}{k} = \frac{p!}{(p-n)!k!(n-k)!} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{n-k},$$

et on obtient donc finalement :

$$\sum_{k=0}^{p}\left[k!\sum_{n=k}^{p}(-1)^{n-k}\binom{p}{k}\binom{p-k}{n-k}\right] = \overbrace{0+\cdots+0}^{(k<p)} + \overbrace{p!}^{(k=p)} = \boxed{p!}$$

Le mot de la fin : *« n personnes laissent leur chapeau au vestiaire ; lorsqu'elles viennent les chercher, chacune d'entre elles prend un chapeau au hasard ; quelle est la probabilité qu'aucune d'entre-elles ne porte son chapeau à la sortie ? »* Ceci revient à denombrer les *dérangements* : permutations de n objets telles qu'aucun ne reste à sa place. C'est ce nombre d_n qu'on a étudié ! La réponse est donc :

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{et on verra que sa limite lorsque } n \to \infty \text{ est } \frac{1}{e} \approx 0,367$$