Deuxième devoir en temps libre

à rendre le samedi 14 octobre

Exercice I – Encadrement de racines

Q.1 Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Q.2 Rappeler sans démonstration l'inégalité triangulaire. En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

Q.3 Démontrer finalement les encadrements suivants :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \ \leqslant\ \sqrt{|x-y|} \ \leqslant\ \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Exercice II – Pentagone régulier

Considérons le plan euclidien usuel, identifié à $\mathbb{R}^2$ par le choix d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère les points $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $A(-\frac{1}{2}, 0)$, puis on construit successivement :

- Le point B, intersection du segment $[OI]$ avec le cercle de centre A et de rayon AJ.
- Le point C, milieu de $[OB]$ et la droite $\mathscr{D}$, médiatrice du segment $[OB]$.
- Le point M, de coordonnées positives, à l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Les constructions géométriques ne devront utiliser que la règle et le compas.

Q.4 Tracer la figure pour une unité de 5 cm, en laissant les traits de construction.

Q.5 Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

(a) Montrer que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. En déduire $\cos(2\alpha)$, puis $\cos(3\alpha)$.

(b) Résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(3x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$, puis déterminer α.

Q.6 Construire, en justifiant, un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice III – Sommes binomiales

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $\quad Z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\mathbf{i}\, 2\pi k/n}$.

Q.7 Exprimer le nombre complexe Z_n sous forme trigonométrique.

Q.8 En déduire que : $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right) = 2^{n-1}\left(1 + \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$.

Exercice IV – Complexes et géométrie

Soient O, A, B les points du plan usuel dont les affixes sont 0, -1 et 1. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de O, A, B. À tout point $M \in \mathscr{E}$ d'affixe z, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

Q.9 Prouver que M, N et P sont deux à deux distincts.

Q.10 On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP est rectangle en P.

(a) Démontrer les équivalences suivantes :

$$MNP \text{ est rectangle en } P \iff |z|^2 + \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \left(z + \tfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \tfrac{1}{2}\right)} = \tfrac{1}{4}.$$

(b) En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ recherché.

Q.11 Soit M un point de $\mathscr{E}$ et z son affixe, de module $\rho > 0$ et d'argument $\theta \in]-\pi, \pi]$.

(a) On considère l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que l'affixe de P est un réel strictement positif. Montrer que $\mathscr{F}$ est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées d'un nombre fini de points).

(b) Représenter les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ dans un repère orthonormé du plan.

(c) Déterminer tous les points d'intersection des ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$.

Exercice V – Équation complexe

Résoudre l'équation suivante d'inconnue z dans $\mathbb{C}$:

$$e^z + e^{-z} = \frac{3 - i}{2}.$$