Troisième devoir en temps libre

partie 1 sur 2

à rendre le mercredi 15 novembre

I Fonction rationnelle

Soit E l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 + 2z + 2 \neq 0$. On considère l'application f définie de E dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in E, \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}.$$

Q.1 Déterminer l'ensemble E.

Q.2 On considère l'équation $f(z) = \dfrac{1}{4}$ d'inconnue z dans E.

(a) Déterminer les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

(b) Rappeler la définition de l'injectivité. L'application f est-elle injective ?

Q.3 Soit $\omega \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer, en fonction de ω, le nombre d'éléments $z \in E$ tels que $f(z) = \omega$.

(b) Rappeler la définition de la surjectivité. L'application f est-elle surjective ?

Q.4 Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Q.5 Décomposer f en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

II Zigzag bijectif

Le but de cet exercice est d'étudier l'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \quad \varphi(x, y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$

Q.6 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble D_n de tous les couples $(k, n-k)$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

(a) Représenter les parties D_0, D_1, D_2, D_3 de $\mathbb{N}^2$ dans un repère du plan.

(b) Démontrer que :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \mathbb{N}^2.$$

Q.7 Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers définie par $t_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n + n + 1$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, expliciter l'image directe $\varphi(D_n)$ à l'aide de t_n.

(c) Montrer que la famille des images directes $\varphi(D_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est un recouvrement disjoint de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Q.8 *Injectivité et surjectivité.*

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $\varphi|_{D_n}$ est injective de D_n dans $\mathbb{N}$.

(b) Déduire des questions précédentes que φ est une injection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

(c) Montrer finalement que φ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Q.9 Sur la figure précédente, numéroter de 0 à 9 les points $\varphi^{-1}(k)$ pour $k \in \{0, \dots, 9\}$.

Q.10 Construire à l'aide de φ une bijection ψ de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Une conséquence remarquable de cet exercice est qu'il y a, en un certain sens, autant d'entiers naturels que de couples (ou de triplets, etc.) d'entiers naturels !

Troisième devoir en temps libre

partie 2 sur 2

à rendre le mercredi 22 novembre

III Étude de fonctions

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1-e^x}$.

Q.11 *Étude de f.*

(a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f(x) + f(x)^2$.

(b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$, en précisant les limites aux bornes du domaine, puis tracer l'allure de son graphe et les éventuelles asymptotes.

Q.12 *Bijectivité.*

(a) Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle I, à expliciter.

(b) On note $g : I \to]0, +\infty[$ la bijection réciproque. Quelle est la monotonie de g ? Tracer l'allure de son graphe.

Q.13 *Étude de la réciproque.*

(a) Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

(b) En déduire une expression de g.

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$. Vérifier le résultat précédent en résolvant l'équation $f(x) = y$.

IV Fonctions multiplicatives sur-additives

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f, définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifient les deux propriétés suivantes.

- Propriété **M** (multiplicativité) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.
- Propriété **SA** (sur-additivité) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$.

Partie A – Exemple

Soit $\alpha \geqslant 1$ un réel. On note f_α la fonction définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha \quad (\text{avec } 0^\alpha = 0 \text{ par convention}).$$

Q.11 Montrer, par étude de variations, que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $(1+t)^\alpha \geqslant 1 + t^\alpha$.

Q.12 En déduire que f_α est solution du problème [on choisira t en fonction de x, y].

Partie B – Propriétés générales des solutions

Q.11 Quelles sont les fonctions *constantes* qui vérifient les propriétés **M** et **SA** ?

Soit maintenant f une solution *non constante* du problème.

Q.11 Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Q.12 Montrer que, pour tout réel positif x non nul, $f(x) \neq 0$ et $\dfrac{1}{f(x)} = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Q.13 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(x^n) = f(x)^n$ [on commencera par $n \in \mathbb{N}$].

Q.14 Montrer que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q.15 En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Partie C – Encadrement par des puissances de 2

On note toujours f une solution *non constante* quelconque du problème.

Q.11 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $k_n(x) = \left\lfloor \dfrac{n \ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

(a) Prouver, à l'aide d'un encadrement, que : $\dfrac{k_n(x)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{k_n(x)} \leqslant x^n < 2^{k_n(x)+1}$.

(c) À l'aide des résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k_n(x)}{n} \leqslant \frac{\ln f(x)}{\ln f(2)} < \frac{k_n(x)+1}{n}.$$

Q.12 En déduire qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^\alpha$.

Q.13 **Conclusion.** Quel est l'ensemble des solutions du problème ?