

Devoir d'entraînement pour le DS 4

La calculatrice est interdite. La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation seront pris en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice I.

Soit a un réel positif.

Q1. Déterminer, en fonction de a , les primitives de $x \mapsto \frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2 + 2ax + 1}$ sur $[0, +\infty[$.

Q2. En déduire, selon les cas, la valeur de $L(a) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\operatorname{ch}(x) - a}{\operatorname{ch}(x) + a} e^{-x} dx$.

Exercice II.

Q3. On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

(a) Dresser le tableau de variation de f , en précisant le calcul des limites.

(b) Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) - x$.

Q4. Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [-1, 1]$.

(b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Problème

Le but du problème est la résolution de l'équation différentielle suivante

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1 + x^2)^2 \ln(x), \quad \text{sur }]0, +\infty[. \quad (\text{E})$$

Partie A. Préliminaires

Q5. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

Q6. En déduire les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ sur $]0, +\infty[$.

Q7. Déterminer une primitive de $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Q8. Déterminer une primitive de $x \mapsto (1 - x^2) \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B. Résolution de l'équation homogène

On s'intéresse d'abord à l'équation homogène associée à (E) :

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad \text{sur }]0, +\infty[\quad . \quad (\text{H})$$

Q9. Déterminer $\alpha > 0$ tel que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (H).

Q10. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $g : x \mapsto \frac{1}{x}f(x)$ définie de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

(a) Vérifier que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est solution de (H) si, et seulement si, g' est solution de l'équation suivante :

$$y' + \frac{2}{x(x^2 + 1)}y = 0, \quad \text{sur }]0, +\infty[\quad . \quad (\text{H}')$$

Q11. Résoudre l'équation différentielle (H').

Q12. En déduire l'ensemble \mathcal{S}_H de toutes les solutions de l'équation (H).

Partie C. Résolution de l'équation

Notons \mathcal{S}_E l'ensemble des solutions de (E).

Q13. En supposant qu'on dispose d'une solution f_0 de (E), montrer que :

$$\mathcal{S}_E = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}.$$

Q14. Soient λ, μ deux fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad x\lambda'(x) + (x^2 - 1)\mu'(x) = 0. \quad (1)$$

(a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\lambda(x) + (x^2 - 1)\mu(x)$ est dérivable et exprimer f' à l'aide de λ et μ .

(b) En déduire que f est deux fois dérivable et exprimer f'' à l'aide de λ', μ et μ' .

(c) Montrer que f est une solution de (E) si, et seulement si,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1 + x^2) \ln x. \quad (2)$$

(d) Soit $x > 0$. Calculer $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en considérant le système linéaire formé par les équations (1) et (2).

(e) En déduire les expressions des fonctions λ et μ .

Q15. Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_E de toutes les solutions de (E).