Écoulement de fluide dans une roche

Exercice 1 Étude de l'écoulement de Poiseuille

La pesanteur est négligée. On s'intéresse à l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ dans un tuyau cylindrique d'axe Oz et de rayon a. Cet écoulement, considéré comme unidirectionnel, est caractérisé, dans un repère de coordonnes cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz, par un champ de vitesse $\mathbf{v} = v(r, z, t)\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$

1) Écrire l'équation traduisant, dans le cas général, la conservation de la matière et simplifier cette équation pour tenir compte de l'incompressibilité de l'écoulement.

2) Montrer qu'en régime permanent le champ des vitesses ne dépend que de r. On se place désormais en régime stationnaire.

3) Montrer alors que la pression ne dépend que de la variable z , puis établir l'équation différentielle liant $v(r)$ r et $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$. En déduire que $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ est nécessairement constant.

4) Déduire de ce qui précède la loi de Poiseuille, $v_z(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(r^2 - a^2)$. Tracer l'allure du graphe de $v_z(r)$ pour $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} < 0$.

5) Exprimer le débit volumique total de la conduite sous la forme : $Q_P = -K\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ en exprimant K en fonction de a et de η. Quel est le signe du gradient de pression responsable d'un écoulement dans le sens positif de l'axe Oz ?

6) Comment varie le champ des pressions dans une conduite horizontale de section constante et de débit Q_P ? Quelle est la différence entre cet écoulement et un écoulement de fluide parfait (écoulement de Bernoulli) ?

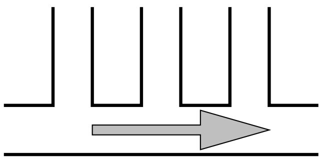


FIGURE 1 – Conduite et prise de pression

La Fig. 1 représente une conduite cylindrique horizontale parcourue par un liquide, avec un débit Q_P et surmontée en divers endroits de tubes de prise de pression verticaux ouverts à l'air libre. Représenter l'allure des hauteurs de liquide dans les tubes verticaux, d'une part dans le cas de l'écoulement de fluide parfait, d'autre part dans le cas de l'écoulement visqueux de Poiseuille.

7) On constate que l'écoulement de Poiseuille est observé dans les tubes de petit diamètre ; à quel paramètre de l'écoulement faut-il comparer le diamètre de la canalisation ?

Exercice 2 Perméabilité d'une roche

Loi de Darcy, premières modélisations

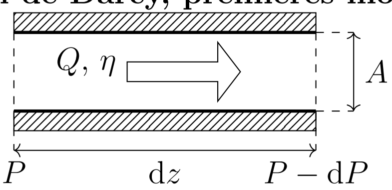


FIGURE 2 – Notations pour la loi de Darcy

La perméabilité intrinsèque d'une roche est l'aptitude de cette roche à laisser circuler à travers ses pores un fluide dont elle est saturée. Cette grandeur peut être chiffrée grâce à la loi expérimentale de Darcy : soit un élément cylindrique d'échantillon de longueur $\mathrm{d}z$ et de section A, saturé d'un fluide de viscosité dynamique η, qui le traverse horizontalement avec un débit volumique Q ; en régime permanent, la pression amont est P, la pression aval $P-\mathrm{d}P (\mathrm{d}P > 0)$. Les parois latérales sont étanches et il n'y a pas de réaction du fluide sur la roche (cas général) ; dans ces conditions, $Q = A\dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$, où k, coefficient de perméabilité est, en première approximation, indépendant du fluide considéré (c'est la loi de Darcy).

1) Quelle est la dimension de k ?

2) En modélisant l'échantillon de roche comme un faisceau de N ($N \gg 1$) cylindres , de rayon a ($a \ll A$), juxtaposés et d'axes paralèlles Oz, montrer que la loi de Darcy peut être déduite de l'écoulement de Poiseuille étudié dans la première partie ; quelle serait, dans cette modélisation et en négligeant l'aire des interstices, la valeur de la constante k ? Quelle est la limite pour N infini ?

Loi de Darcy et diverses géométries d'écoulements

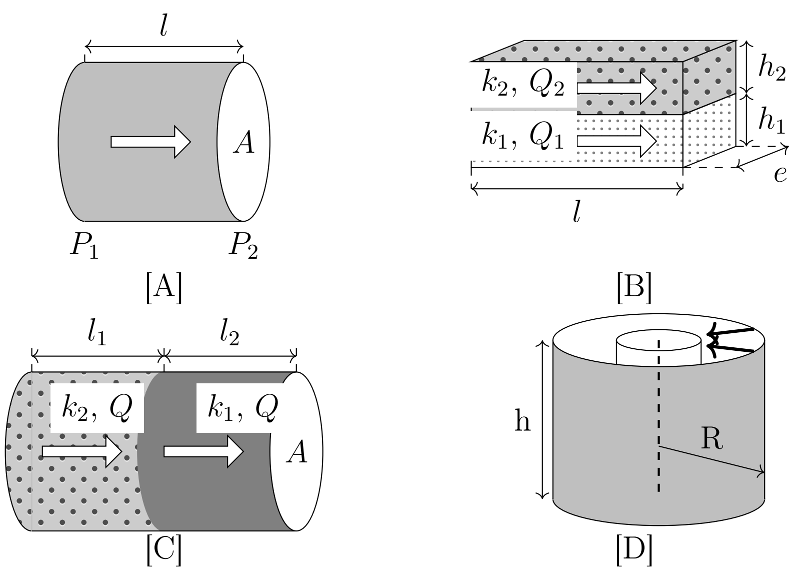


FIGURE 3 – Diverses géométries d'écoulements : simple en [A], paralèlle en [B], série en [C] et cylindrique en [D]. Les flèches indiquent le sens des divers écoulements.

<u>Écoulements unidirectionnels</u>

Les configurations [A], [B], [C] et [D] sont représentées sur la figure 3.

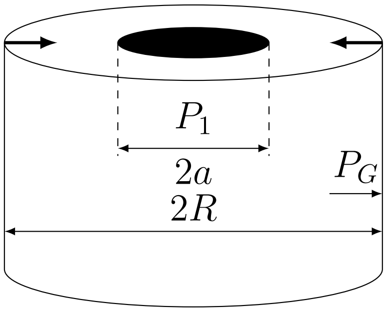
3) Calculer Q en fonction de A, η, k, P_1, P_2 et l pour un écoulement simple dans un cylindre de longueur l et de section A (Fig. 3 [A]).

4) Définir la permabilité équivalente k_m d'une association de deux terrains de perméabilités différentes, dans les deux cas suivants :

- association en parallèle (Fig. 3 [B]) : deux couches planes géologiques, de même largeur e, de même longueur l, d'épaisseurs respectives h_1 et h_2 et de perméabilités respectives k_1 et k_2, superposées parallèlement à la direction d'écoulement.
- association en série (Fig. 3 [C]) : deux couches planes géologiques, de même section A, de longueurs respectives l_1 et l_2 et de perméabilités respectives k_1 et k_2, juxtaposées parallèlement à la direction d'écoulement.

écoulement radial

5) On considère le régime permanent d'écoulement dans la portion d'échantillon de symétrie cylindrique représentée Fig. 3 [D]. La hauteur de l'élément est h, la pression en un point du cylindre intérieur est $P(R_i) = P_i$ la pression à l'extérieur est $P(R_e) = P_e$, avec $P_e > P_i$. Montrer que la vitesse d'écoulement en un point à la distance r de l'axe est proportionnelle à $1/r$; que peut-on en déduire sur le débit $Q(r)$? Admettant que la loi de Darcy s'écrive ici $Q = A\dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = 2\pi r h\dfrac{k}{\eta}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}$, appliquer cette loi entre deux cylindres de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ et par intégration calculer $P_e - P_i$ en fonction de h, k, η, R_i, R_e et Q.



6) Application : la pression dans un puits de forage cylindrique de rayon a creusé dans la roche poreuse et implanté loin des limites de la couche géologique est note P_1 ; on constate qu'à partir d'un rayon R, dit rayon de drainage, la pression ne varie plus et vaut P_G (pression de gisement[1]) ; exprimer le débit du puits en fonction de P_G, P_1, R, a, h et k.

[1]. Cette saturation exprime la limite de validité de la loi donnant $P_e - P_i$ en fonction des rayons.