

PROBLEME 1 : autour de l'élément Al (CCP PSI 2013)

A1) Dessin habituel : cube de côté a , un atome à chaque sommet et au milieu de chaque face.

A2) Le contact se fait selon la diagonale d'une face de cube : $4R_{Al} = a\sqrt{2}$.

A3) Un atome au sommet appartient à huit cubes différents, donc en fait compte pour $1/8$ d'atome. Un atome au centre de face appartient à deux cubes différents donc compte pour $1/2$.

Bilan : $8 \cdot (1/8) + 6 \cdot (1/2) = 4$ atomes par maille.

A4) La compacité c est le rapport du volume occupé par les quatre atomes sur le volume de la maille. $c = \frac{4 \cdot \frac{4\pi}{3} R_{Al}^3}{a^3}$. Avec la relation obtenue en A2, on obtient : $c = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$.

A5) La masse d'un atome d'Al est $m = M/N_a$. La maille de volume a^3 contient 4 atomes.

La masse volumique est donc : $\rho_{Al} = \frac{4m}{a^3} = \frac{M}{4\sqrt{2}N_a R_{Al}^3} \approx 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Ce qui correspond à une densité de 2,7 par rapport à l'eau.

B6) K_s est la constante de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium. β est la constante de formation globale du complexe aluminate (à relier à sulfate).

B7) La troisième réaction est la somme des deux premières donc $K = \beta \cdot K_s$.

B8) La solution à doser est dans un bécher, la solution dosante est dans la burette graduée. On assure l'homogénéité de la solution avec un agitateur magnétique. On plonge la double-électrode du pH-mètre dans la solution à doser.

B9) On mesure en fait une différence de potentiel.

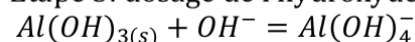
B10)

Etape 1 : dosage de l'acide nitrique, acide fort, selon la réaction $H_3O^+ + OH^- = 2H_2O$

On distingue à la fin de l'étape 1 le saut de pH correspondant à l'équivalence.

Etape 2 : dosage de Al^{3+} selon $Al^{3+} + 3OH^- = Al(OH)_{3(s)}$

Etape 3: dosage de l'hydroxyde d'aluminium pour former l'aluminate selon:



B11) Le volume de soude à verser pour doser Al^{3+} est $(13,8 - 3,7) = 10,1 \text{ mL}$, ce qui correspond à $10,1 \text{ mmol}$ de soude versée, soit $10,1/3 \text{ mmol}$ d'ions Al^{3+} à doser dans un volume de 40 mL . La concentration c est donc $10,1/120 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ soit environ : $0,084 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

B12) L'apparition de $Al(OH)_3$ a lieu pour un volume de base ajouté de $3,7 \text{ mL}$ à un pH voisin de 4. A ce moment la concentration en Al^{3+} est d'environ $0,077 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[OH^-] \approx 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Ce qui permet d'évaluer $K_s \approx 7,7 \cdot 10^{-32}$ soit $pK_s \approx 31$.

A l'équivalence de l'étape 3, on peut évaluer le pH à 12, et $10,1/3 \text{ mmol}$ d'aluminate pour un volume total de $57,2 \text{ mL}$. On évalue donc $[OH^-] \approx 10^{-2} \text{ M}$ et $[Al(OH)_4^-] \approx 59 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$. On en déduit $K \approx 5,9$ puis $\beta = K/K_s \approx 8 \cdot 10^{33}$.

C13) Couple O_2/H_2O : $O_2 + 4e + 4H^+ = 2H_2O$ $E = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$

Couple H_2O/H_2 : $2H^+ + 2e = H_2$ $E = 0,0 - 0,06 \text{ pH}$.

C14) Les deux droites précédentes dessinent deux frontières obliques et délimitent trois zones. Du haut vers le bas, on a successivement les zones de prédominances de O_2 , puis H_2O et H_2 .

PROBLEME 2 : modèle de ligne électrique (CCP PSI 2013)

J48) RI_e^2 représente la puissance dissipée par effet Joule, elle est localisée dans le câble. $LI_e^2/2$ représente l'énergie magnétique stockée dans l'inductance, celle-ci est localisée dans l'espace tout entier.

J49) C est un coupe-circuit en BF, un court-circuit en HF. L'inverse pour L. On a ici un filtre passe-bas.

J50) A l'aide d'un PDT, on obtient : $\underline{H} = \frac{1}{1-LC\omega^2+iRC\omega}$.

J51) Pour l'amplitude, il n'y a aucun pb et : $V_{sm} = \frac{V_{em}}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}}$.

Pour la phase, c'est un peu plus compliqué : $\varphi = -\arg(1-LC\omega^2+iRC\omega)$.

J52) a) $\frac{V_{sm}}{V_{em}} = \frac{1}{\sqrt{(1-lc\omega^2d^2)^2+(cr\omega d)^2}}$

b) Ce rapport considéré comme une fonction de d est maximal pour $d_{critique} = \frac{1}{\sqrt{lc\omega}} \approx 822 \text{ km}$. On a une très belle résonance autour de cette valeur.

c) Pour 400 km, le rapport vaut environ 1,31.

PROBLEME 3 : le millenium bridge (Mines PSI 2016)**I. — Oscillateur simple**

□ 1 – La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse donne : $m\vec{a} = \vec{F}_f + m\vec{g} - k(x - \ell_0)\hat{u}_x$ qui, projeté sur l'axe Ox, donne $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$. À l'équilibre $0 = -mg - k(\bar{x} - \ell_0)$. En soustrayant les deux équations précédentes et en

posant $X = x - \bar{x}$, on obtient $\ddot{X} = -\frac{\alpha}{m}\dot{X} - \frac{k}{m}X$. On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui est la pulsation propre (pulsation du régime libre sans amortissement), $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ qui est le facteur d'amortissement, sans dimension, et $\bar{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$ position d'équilibre.

□ 2 – L'équation caractéristique $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ est de discriminant réduit $\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 < 0$, les solutions sont donc de type $X(t) = A\cos(\omega t + \phi)\exp(-\xi\omega_0 t)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Avec les conditions initiales données, on obtient : $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_0}\sin(\omega t)\exp(-\xi\omega_0 t)$.

Pour $\xi = 0$, $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega t)$.

Avec une force $\vec{F}_v = \beta\dot{x}\hat{u}_x$, cela revient à remplacer α par $\alpha - \beta$. Le terme d'ordre 1 peut devenir négatif ce qui engendre une instabilité : solution avec exponentielle divergente au lieu de sinusoidale amortie : à l'aide de « $x^2 - Sx + P = 0$ », on voit que l'on a un produit positif, donc racine de même signe ou norme des deux racines conjuguées et une somme positive, donc deux racines positives ou complexes à partie réelle positive.

□ 3 – Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox devient

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0) - F_0 - F_1 \cos(2\pi f t), \text{ soit } \ddot{X} = -\xi\omega_0\dot{X} - \omega_0^2 X - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(2\pi f t),$$

soit encore en prenant comme variable $Y : \ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(2\pi f t)$.

Réécrit en complexe, on obtient $\underline{Y}(-\omega^2 + 2j\omega\xi\omega_0 + \omega_0^2) = -\underline{E}$.

$$\underline{H} = -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 + 2j\xi\Omega - \Omega^2}$$

□ 4 – On a affaire à un passe-bas qui pourra présenter un phénomène de résonance si la norme de \underline{H} présente un maximum, ce qui est le cas si la norme au carré du

dénominateur présente un minimum. On pose $z(\Omega) = \left| \frac{1}{\omega_0^2 \underline{H}} \right|^2 = (1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2$.

$\frac{dz}{d\Omega} = -2(1 - \Omega^2)2\Omega + 8\xi^2\Omega$ qui s'annule (en dehors de 0, minimum ou maximum attendu

d'un passe-bas), si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour $\Omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Pour $\xi^2 \ll 1$, on a $\omega_r \approx \omega_0$, au deuxième

ordre près en ξ , et $|H(\omega_r)| \approx \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{2\xi}$.

□ 5 – L'asymptote horizontale à basse fréquence est à 0 dB, le maximum se situe à $\omega = 12 \text{ rads}^{-1}$ soit $f = 1,9 \text{ Hz}$ et vaut 9 dB soit $\omega_0^2 |\underline{H}|_{\max} = 10^{9/20} = 2,8$ et

$$\xi \approx \frac{1}{2(\omega_0^2 H_{\max})} = 0,18.$$

□ 6 – On a vu dans la question 4 que le déplacement de la structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance (cf. l'introduction). Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction.

□ 7 – On peut envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations et faire ensuite $\vec{F} = m\vec{a}$. Un capteur de force par extensométrie fixé au tablier pose problème car le piéton se déplace, problème que l'on peut résoudre à l'aide d'un tapis roulant. On peut également envisager une prise de vue vidéo avec des marqueurs.

□ 8 – La fréquence maximale des spectres correspond à la moitié de la fréquence d'échantillonnage noté f_e .

D'après le graphe 4, de fréquence d'échantillonnage la plus grande, $f_e = 300/(10 - 1) = 33,3 \text{ Hz}$, donc sans problème de repliement jusqu'à $f_e/2 = 16,7 \text{ Hz}$, la fréquence de la force verticale due à la marche est de 2 Hz avec présence d'harmoniques 4, 8, 10 et 12.

Pour le graphe 3, de $f_e = 300/89 = 3,37 \text{ Hz}$, on a repliement du fondamental à $3,37 - 2 = 1,37 \approx 1,4 \text{ Hz}$ et du deuxième harmonique à $|3,37 - 4| = 0,63 \text{ Hz}$.

Pour le graphe 2, de $f_e = 300/26 = 11,5 \text{ Hz}$, on observe le fondamental, le deuxième harmonique et le repliement du quatrième harmonique à $11,5 - 8 = 3,5 \approx 3,2 \text{ Hz}$.

Pour le graphe 1, de $f_e = 300/179 = 1,7 \text{ Hz}$, on observe le repliement du fondamental à $|1,7 - 2| = 0,3 \text{ Hz}$.

La fréquence de la marche est de l'ordre de 1 Hz, les deux pieds jouant un rôle symétrique, la fréquence de la force verticale est le double.

□ 9 – La fréquence de résonance du pont correspond à la fréquence de la marche !

Le système d'« amortisseur » n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre dédoublé la résonance en créant une anti résonance pour la fréquence de la marche (-8 dB cette fois). L'explication vient donc du couplage des deux oscillateurs, hors programme.

PROBLEME 4 : stockage d'énergie par pompage thermique (Centrale PSI 2020)

I-A Schématisation simplifiée du procédé

Q1 :

Le coefficient de performance d'une pompe à chaleur est défini par :

$$\text{COP} = \frac{\text{ce qu'on veut}}{\text{ce qu'on dépense}} = -\frac{Q_{\text{ch}}}{W_{\text{cycle}}} \quad (Q_{\text{ch}} < 0)$$

or d'après le premier principe : $\Delta U_{\text{cycle}} = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}$

$$\text{COP} = \frac{Q_{\text{ch}}}{Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}}}$$

En utilisant le second principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{Fr}}}{T_{\text{Fr}}} + S^{\text{créé}} = 0$
on obtient :

$$\text{COP} = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{Fr}}}{T_{\text{ch}}} - \frac{T_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}} S^{\text{créé}}}$$



Lorsque le cycle est réversible (cycle de CARNOT), $S^{\text{créé}} = 0$

$$\text{COP}_{\text{CARNOT}} = \text{COP}_{\text{max}} = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{Fr}}}{T_{\text{ch}}}}$$

En respectant les notations de l'énoncé ;

$$\text{COP}_{\text{max}} = \frac{1}{1 - \frac{T_{\text{B}}}{T_{\text{H}}}}$$

Q2 :

L'efficacité d'une machine motrice est donnée par :

$$\eta = \frac{\text{ce qu'on veut}}{\text{ce qu'on dépense}} = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{ch}}} \quad (Q_{\text{ch}} > 0)$$

- Premier principe : $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}$
- Deuxième principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{Fr}}}{T_{\text{Fr}}} + S^{\text{créée}}$

$$\eta = \frac{Q_{\text{ch}} + Q_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}} = 1 + \frac{Q_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{Fr}}}{T_{\text{ch}}} - \frac{T_{\text{Fr}}}{Q_{\text{ch}}} S^{\text{créée}}$$

! Lorsque le cycle est réversible (cycle de CARNOT), $S^{\text{créée}} = 0$

$$\eta_{\text{CARNOT}} = \eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_{\text{Fr}}}{T_{\text{ch}}}$$

$$\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_{\text{B}}}{T_{\text{H}}}$$

Q3 :

Dans les conditions de réversibilité (validité du théorème de CARNOT), si les températures des deux sources restent constantes pendant les deux phases :

$$(\text{COP})_{\text{CARNOT}} \times \eta_{\text{CARNOT}} = 1$$

Cela justifie que l'énergie stockée est totalement récupérée pendant la phase de déstockage (pas d'énergie rejetée)

- Pendant la phase de stockage ① :

$$\underbrace{E_{\text{restituée}} \text{ ①}}_{\text{Énergie consommée en stockage}} = \underbrace{E_{\text{turbo}} \text{ ①}}_{\text{Énergie apportée par les turbomachines (turbine + compresseur)}} + \underbrace{E_{c_1}}_{\text{Énergie apportée par chauffage}}$$

- Pendant la phase de déstockage ② :

$$\underbrace{E_{\text{restituée}} \text{ ②}}_{\text{Énergie récupérée en déstockage}} = \underbrace{E_{\text{turbo}} \text{ ②}}_{\text{Énergie cédée par les turbomachines}} + \underbrace{E_{c_2}}_{\text{Énergie apportée par chauffage}}$$

« Production de l'énergie mécanique à partir de l'énergie thermique. »

- $E_{T_1} = E_{\text{restituée } \textcircled{2}} + E_{r_1}$ avec E_{r_1} : énergie cédée par refroidissement.
- $E_{T_2} = E_{\text{restituée } \textcircled{1}} + E_{r_2}$ avec E_{r_2} : énergie cédée par refroidissement.
- Le rendement du procédé :

$$\Gamma = -\frac{E_{\text{restituée } \textcircled{2}}}{E_{\text{restituée } \textcircled{1}}} = \frac{E_{T_1} + E_{r_2}}{E_{\text{restituée } \textcircled{1}}} = \frac{E_{\text{restituée } \textcircled{1}} + E_{r_1} + E_{r_2}}{E_{\text{restituée } \textcircled{1}}}$$

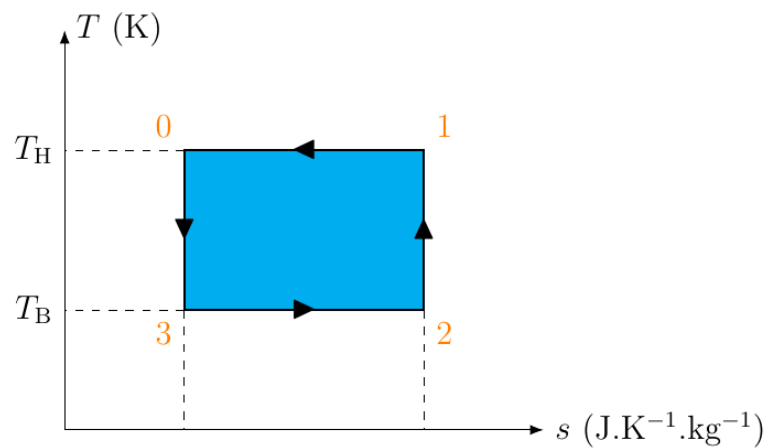
S'il n'y a pas de perte : $E_{r_1} = E_{r_2} = 0$

$$\Gamma = 1$$

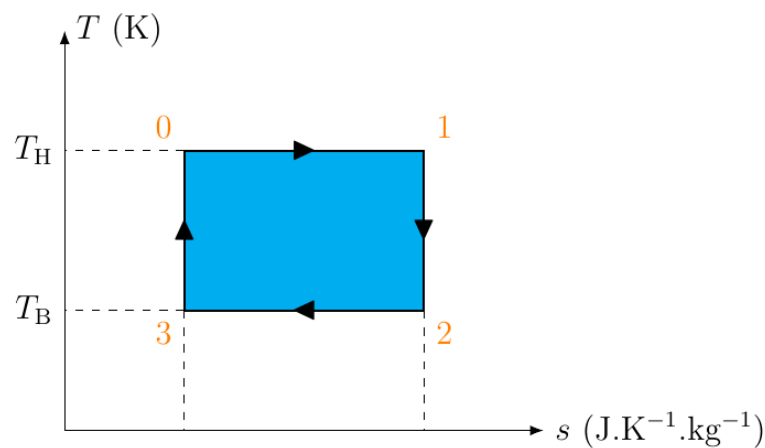
Q4 :

Le cycle de CARNOT (réversible) est constitué par deux isothermes séparées par deux isentropiques ($s = \text{cte}$)

- Pour le stockage :



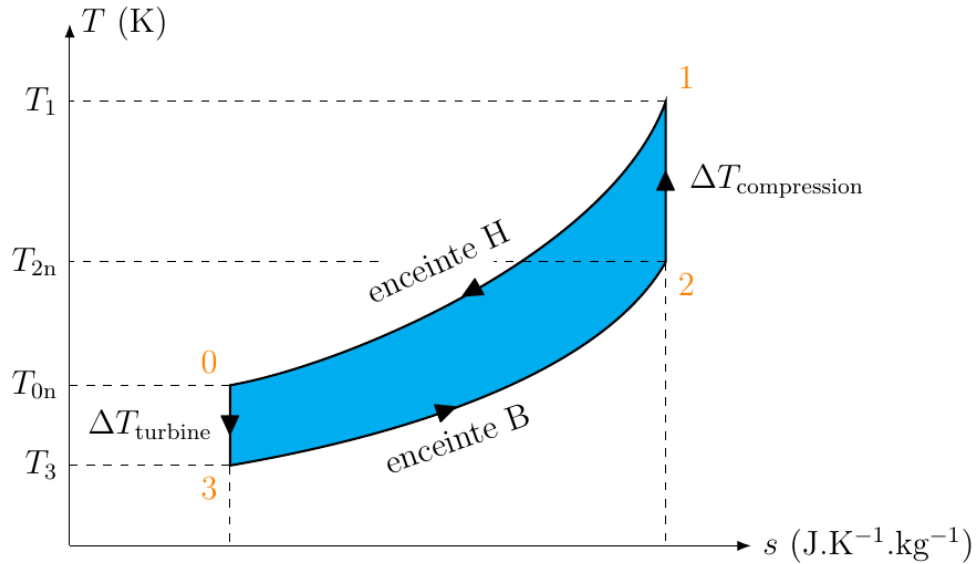
- Pour le déstockage :



I-B Étude de la phase de stockage

Q5 :

■ Pour le stockage :



Q6 :

Au niveau du compresseur (2 → 1), la transformation est adiabatique, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 ds &= \delta s^{\text{créé}} \\
 \Rightarrow s_1 - s_2 &= s^{\text{créé}} > 0 \\
 \Rightarrow s_1 &> s_2
 \end{aligned}$$

ce qui justifie que $T_1 > T_{1is}$

Q7 :

L'application du premier principe pour les systèmes ouverts nous donne :

$$\Delta h = \omega + q_e, \quad \Delta E_c = \Delta E_p = 0$$

or le passage du fluide caloporteur dans le compresseur et la turbine se fait de manière adiabatique ($q = 0$)

$$\omega = h_s - h_e$$

Soient :

$$\begin{cases}
 \omega_{cis} &= h_{scis} - h_{ec} \\
 \omega_c &= h_{sc} - h_{ec} \\
 \omega_t &= h_{st} - h_{et} \\
 \omega_{tis} &= h_{stis} - h_{et}
 \end{cases}$$

Donc :

$$\eta_{cs} = \frac{\omega_{cis}}{\omega_c} = \frac{h_{scis} - h_{ec}}{h_{sc} - h_{ec}}$$

$$\eta_{ts} = \frac{\omega_b}{\omega_{tis}} = \frac{h_{st} - h_{et}}{h_{stis} - h_{et}}$$

Q8 :

- 2 → 1 : Compression adiabatique + irréversible

$$\begin{aligned} \eta_{cs} &= \frac{c_p (T_{1is} - T_{2n})}{c_p (T_1 - T_{2n})} \\ \Rightarrow T_1 &= T_{2n} + \frac{1}{\eta_{cs}} (T_{1is} - T_{2n}) \end{aligned} \quad (1)$$

- 0 → 3 : détente adiabatique + irréversible

$$\begin{aligned} \eta_{ts} &= \frac{c_p (T_3 - T_{0n})}{c_p (T_{3is} - T_{0n})} \\ \Rightarrow T_3 &= T_{0n} + \eta_{ts} (T_{3is} - T_{0n}) \end{aligned} \quad (2)$$

De plus :

- 2 → 1is : adiabatique + réversible + G.P.

$$\begin{aligned} PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \text{cte} \\ P_B T_{2n}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= P_H T_{1is}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ \psi &= \left(\frac{P_H}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\left(\frac{T_{2n}}{T_{1is}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_{1is}}{T_{2n}} \end{aligned}$$

$$T_{1is} = T_{2n} \psi$$

- 0 → 3is : adiabatique + réversible + G.P.

$$\begin{aligned} PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \text{cte} \\ P_H T_{0n}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= P_B T_{3is}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ \psi &= \left(\frac{P_H}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\left(\frac{T_{3is}}{T_{0n}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_{0n}}{T_{3is}} \end{aligned}$$

$$T_{3is} = \frac{T_{0n}}{\psi}$$

! On constate que ψ est un rapport thermique de compression isentropique.

On remplace T_{1is} et T_{3is} par leurs expressions dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$T_1 = T_{2n} + \frac{1}{\eta_{cs}} (\psi - 1) T_{2n}$$

$$T_3 = T_{0n} + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) T_{0n}$$

résultat :

$$T_1 = T_{2n} \left(1 + \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} \right)$$

$$T_3 = T_{0n} \left(1 + \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

Q9 :

L'énergie massique mise en jeu lors du stockage est donnée par :

$$e_s = \Delta h_{\text{compression}} + \Delta h_{\text{détente}}$$

$$e_s = c_p (\Delta T_{\text{compresseur}} + \Delta T_{\text{turbine}})$$

$$e_s = c_p ((T_1 - T_{2n}) + (T_3 - T_{0n}))$$

Q10 :

$$e_s = c_p \left(T_{2n} \frac{\psi - 1}{\eta_{cs}} + T_{0n} \eta_{ts} \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right) \right)$$

Q11 :

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}, \quad \frac{c_p}{c_v} = \gamma \quad \Rightarrow \quad c_p - \frac{c_p}{\gamma} = \frac{R}{M}$$

$$c_p = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}$$

A.N.

$$c_p = 518 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e_s = 177,73 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

I-C Positionnement du procédé SEPT par rapport aux autres modes de stockage

Q12 :

Comparaison des différentes technologies de stockage en termes de puissance et de capacité :

- L'hydraulique gravitaire et l'air comprimé (CAES) sont les procédés les mieux adaptés, ils ont une grande puissance et une grande capacité.
- Les batteries offrent des performances très intéressantes.
- Le stockage par hydrogène n'affiche pas actuellement des rendements attractifs.
- La technologie SMES a une bonne puissance mais elle souffre de sa faible capacité.
- Le procédé SEPT est performant en terme de puissance et de capacité (capacité $\simeq 500$ MWh; puissance $\simeq 100$ MW).

! la composante coût, le temps de décharge et l'impact sur l'environnement sont également des points à discuter.

Q13 :

$$\dot{m} = \frac{P}{c_p T}$$

Q14 :

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{fluide}}}{V_{\text{enceinte}}} = \frac{m_{\text{Ar}}}{\rho_{\text{Ar}} V_e}$$

$$m_{\text{Ar}} = \varepsilon \rho_{\text{Ar}} V_e = 14400 \text{ kg d'Argon}$$

Q15 :

L'énergie que peut stocker une batterie automobile est :

$$E = qV = 503600 \times 12$$

$$E = 2,16 \text{ MJ}$$

$$e_{\text{batt}} = 216 \text{ kJ.kg}^{-1}$$