Version B (plus difficile)

PROBLEME 1 : formation de bulles

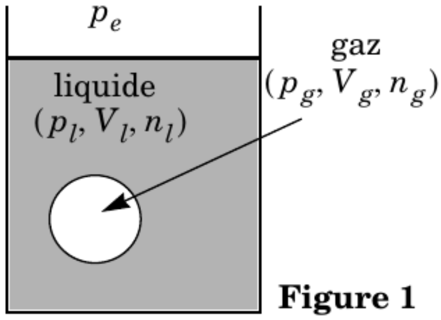

Figure 1

Dans cette partie, on considère le système fermé, de volume V, constitué de deux sous-systèmes (cf. figure 1) :

- Une unique bulle de dioxyde de carbone, supposée sphérique de rayon a et de volume V_g, formée de n_g moles de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait ;
- Le liquide, de volume $V_l = V - V_g$, assimilé à une solution aqueuse diluée de dioxyde de carbone, contenant n_l moles de dioxyde de carbone dissous ; on note C le nombre de molécules de dioxyde de carbone dissoutes par unité de volume dans cette solution et on suppose, dans cette partie, C uniforme.

Le liquide est au contact d'une atmosphère imposant une pression extérieure p_e constante. On ne tient pas compte, dans cette partie, de la pesanteur. On note p_l la pression dans la phase liquide et p_g la pression dans la phase gazeuse ; ces pressions sont supposées uniformes, a priori différentes entre elles et différentes de p_e. La température du système est maintenue uniforme, via un contact avec un thermostat de température T constante. Le nombre total de moles de dioxyde de carbone $n = n_g + n_l$ dans le système est supposé constant.

I.A - Soit U l'énergie interne du système et S son entropie. Démontrer que la fonction $G^* = U + p_e V - TS$ est un potentiel thermodynamique.

I.B - On choisit comme variables indépendantes, le rayon a de la bulle, le volume V_l de la phase liquide et le nombre de moles n_g dans la bulle. Compte tenu du phénomène de tension superficielle, la différentielle de la fonction G^* s'écrit alors :

$$dG^* = \mu_g dn_g + \mu_l dn_l + (p_e - p_l)dV_l + (p_e - p_g)dV_g + Ad\Sigma$$

- où Σ est la surface de la bulle de gaz de rayon a et A une constante positive appelée coefficient de tension superficielle ;
- où $\mu_g = \mu_g^0 + RT\ln(p_g/p^0)$ et $\mu_l = \mu_l^0 + RT\ln(C/C^0)$;
  p^0 est une pression de référence ;
  C^0 est un nombre volumique de référence ;
  μ_g^0 et μ_l^0 ne dépendent que de T, donc sont constantes.

I.B.1) On envisage une variation dV_l de V_l, à n_g et a fixés. Montrer qu'à l'équilibre on a $p_l = p_e$ et interpréter concrètement.

I.B.2) On envisage une variation da de a, à n_g et V_l fixés. Montrer qu'à l'équilibre on a $p_g = p_e + 2A/a$.

I.B.3) On envisage une variation dn_g de n_g, à a et V_l fixés. Montrer qu'à l'équilibre on a $\mu_g = \mu_l$.

I.B.4) Déduire des questions précédentes l'équation (E) donnant implicitement le rayon d'équilibre a_{eq} en fonction de la pression p_e, du nombre volumique C et des constantes μ_g^0, μ_l^0, R, T, A, p^0, p_e et C^0.

I.B.5) Soit p_∞ la valeur de la pression extérieure p_e telle qu'une bulle de rayon a infini soit en équilibre avec la phase liquide pour le même nombre volumique C.

Montrer que la condition d'équilibre (E) s'écrit aussi bien $a_{eq} = 2A/(p_\infty - p_e)$.

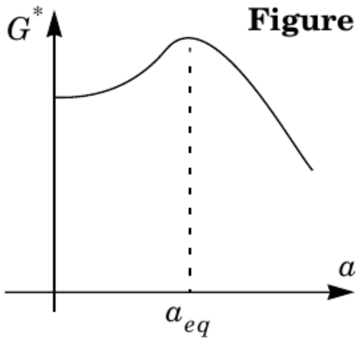

Figure 2

I.C - On suppose dans cette question que le nombre volumique C en dioxyde de carbone dissous est fixé et que la relation $p_g = p_e + 2A/a$ est vérifiée ; en revanche, l'égalité des potentiels chimiques n'est pas forcément réalisée. Dans ces conditions, la fonction G^* n'est plus fonction que de a. La figure 2 fournit l'allure du graphe de $G^*(a)$ pour $0 \leq a \leq 2a_{eq}$, qu'on ne demande pas de justifier.

I.C.1) Ce graphe est-il compatible avec l'étude précédente ? Quel renseignement supplémentaire en tire-t-on sur l'état d'équilibre $a = a_{eq}$?

I.C.2) Justifier que seules les bulles de champagne ayant un rayon initial supérieur à une valeur critique a_c, à préciser, peuvent croître spontanément.

I.C.3) On donne $A = 7 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $p_\infty = 3$ bars et $p_e = 1$ bar. Calculer a_c. Comment expliquer la présence initiale de bulles de rayon supérieur à a_c à la surface du verre ?

PROBLEME 2 : désintégration de l'Uranium 235

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes ; le plus répandu à l'état naturel, U^{238}, possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est U^{235} dit isotope « fissile ». Lorsqu'un noyau U^{235} est heurté par un neutron (noté n), il peut « fissionner », suivant la réaction suivante : ${}^{235}U_{92} + n \rightarrow X + Y$ + plusieurs neutrons + énergie, où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.

Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d'U^{235} est $\nu \approx 2,5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'U^{235} est en moyenne de $170 \cdot 10^6 eV$ $(1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J)$. Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

I.A - Diffusion de neutrons

I.A.1) Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d'U^{235} ?

I.A.2) L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4,2 \cdot 10^9$ Joule. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d'U^{235}, exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.

I.A.3) Soit $N(x, y, z, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et $\vec{J}$ le vecteur densité de flux de neutrons, tel que $\vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}\ dt$ représente le nombre de neutrons traversant la surface $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt. On donne l'équation fondamentale de la neutronique :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J} + \left(\frac{\nu - 1}{\tau}\right) N(x, y, z, t) .$$

On rappelle de plus la loi de Fick $\vec{J} = -D\overrightarrow{\text{grad}}N$ et la relation $\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}}N) = \Delta N$.

a) En vous aidant d'analogies avec d'autres domaines de la Physique, pouvez-vous interpréter les deux termes situés à droite de l'égalité ?

b) Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?

c) Expliquer, en particulier, pourquoi $\nu - 1$ intervient dans le terme de droite, et pas ν.

I.B - Masse critique

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.

I.B.1) *Calcul de la masse critique dans le cas d'une boule d'uranium 235 pur, de rayon R*

On suppose que le problème est à géométrie sphérique de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$N = N(r, t) = N_1(r)e^{\nu' t/\tau} \text{ et } \vec{J}(r,t) = -D\frac{\partial N}{\partial r}\vec{e}_r .$$

Dans cette situation, on a :

$$\Delta N_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dN_1}{dr}\right) .$$

a) On pose

$$g(r) = rN_1(r) \text{ et } \alpha^2 = \left|\frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau}\right| ;$$

montrer que la fonction $g(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique. On recherche une fonction $r \to N_1(r)$ telle que $N_1(r = R) = 0$, que N_1 ne s'annule pas pour $r \in]0, R[$ et telle que N_1 tende vers une limite finie quand r tend vers zéro. Montrer que c'est possible si

$$\nu' = (\nu - 1) - \frac{\pi^2 D\tau}{R^2}.$$

b) Interpréter le fait que ν' augmente si R croît.

c) Quelle est la différence fondamentale entre les cas $\nu' > 0$ et $\nu' < 0$?

d) Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de D, τ et ν.

e) On donne pour U_{92}^{235} de masse volumique $\rho = 19 \cdot 10^3 \text{kg m}^{-3}$: $\pi^2 D\tau = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{m}^2$ et $\nu = 2,5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c, ainsi que la masse critique M_c (masse de la boule d'uranium de rayon R_c).

I.B.2) *Mise en œuvre d'une bombe nucléaire*

Pour des raisons évidentes, on ne peut pas stocker sans précautions une masse d'uranium supérieure à la masse critique. Quelle disposition raisonnable pouvez-vous suggérer pour le conditionnement d'une arme nucléaire, embarquée dans un missile ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?

PROBLEME 3B : température dans le tunnel de Fréjus

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

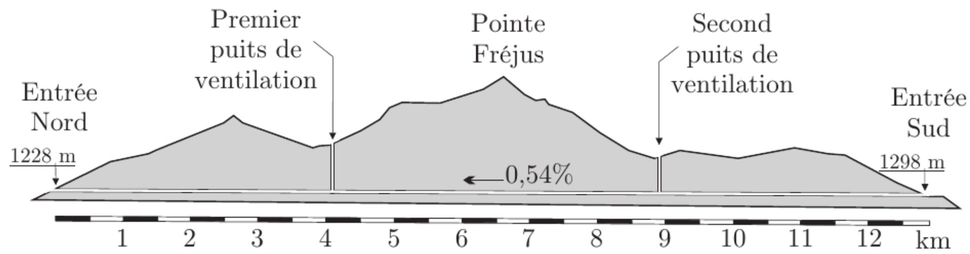

FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30° C. Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

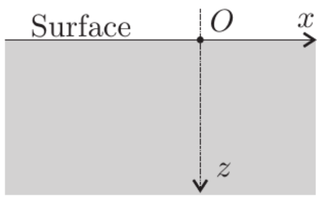

FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ, de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s. Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0°$ C. (Voir figure 2).

❏ **1** — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.

❏ **2** — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire $d\mathcal{S}$ pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

❏ **3** — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ.

❏ **4** — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface $\mathcal{S}$. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❏ **5** — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❏ **6** — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}$ et $\mathcal{S}$ puis en fonction de ρ_s, c_s, $\mathcal{S}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

❏ **7** — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\dfrac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0\cos(\omega t)$.

❏ **8** — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de $\underline{k}$ qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k''. Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❏ **9** — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2{,}65 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $c_s = 8{,}50 \times 10^3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et $\kappa = 3{,}00$ SI.

❏ **10** — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45{,}0$ km. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10{,}0\,\mathrm{km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2{,}50\,\mu\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \widehat{e}_z$ avec $j_m = 35{,}0\,\mathrm{mW}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

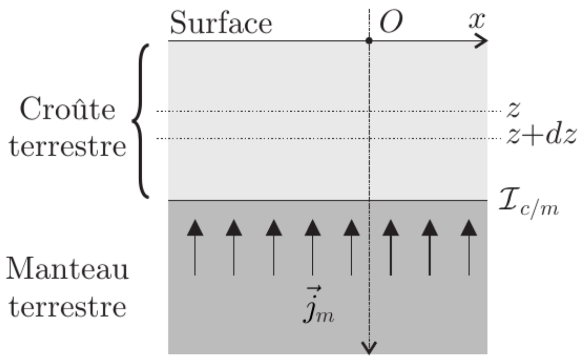

FIGURE 3 – Modèle géophysique

❏ **11** — Effectuer, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface $\mathcal{S}$, comprise entre z et $z + dz$.

❏ **12** — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H, L_c, $\mathcal{P}$, j_m, κ et $\theta_0 = 0°$ C la température moyenne de surface en $z = 0$.

❏ **13** — Exprimer le flux thermique total $\vec{j_S} = j_S \widehat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❏ **14** — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1{,}70\,\mathrm{km}$) puis j_S.

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x,z=0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10{,}0$ km.

❏ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x,z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x,z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x,z=0)$ et qui demeure finie lorsque $z \to +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

❏ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x,z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

❏ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x,z=h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x,z=0)$ en fonction de h, $T(x,z=h)$ et $\left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.
Déterminer $\left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S. En déduire que que l'on peut écrire

$$T(x,z) = \theta_0 + c_1 z + c_2\left(1 - e^{-z/H}\right) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1, c_2, c_3 et δ en fonction des données du problème.