

PROBLEME 1 : formation de bulles (centrale PC 2005)

I.A	<p>Un potentiel thermodynamique est une fonction des paramètres d'état et des contraintes telle qui lors d'une évolution spontanée du système tend à diminuer. Elle est minimale à l'équilibre</p> <p>Lors d'une évolution monobare et monotherme: $\Delta U = U_F - U_I = W + W' - Q$</p> <p>$W = -\int P dV = -P_e(V_F - V_I)$</p> <p>$W'$ représente le travail des forces autres que les forces de pression.</p> <p>Le second principe nous dit que $\Delta S = \Delta S_{\text{éch}} + \Delta S_{\text{cré}}$</p> <p>or $\Delta S_{\text{éch}} = Q/T$ (car c'est l'opposé de l'entropie échangée par le thermostat (subissant des évolutions réversibles à la température T) et $\Delta S_{\text{cré}} \geq 0$</p> <p>donc $Q = T \Delta S_{\text{éch}} \leq T \Delta S$</p> <p>$U_F - U_I = W + W' + Q \leq W' - P_e(V_F - V_I) + T(S_F - S_I)$</p> <p>soit encore : $W' \geq U_F - U_I - T(S_F - S_I) + P_e(V_F - V_I)$</p> <p style="text-align: center;">$W \geq [G^*_F - G^*_I]$</p> <p>Lors d'une évolution sans travail autres que celui des forces de pression $G^*_F < G^*_I$</p> <p>G est donc bien un potentiel thermodynamique</p>
I.B.1	<p>Si n_g est fixé $dn_g=0$, $dn_l = d(n-n_g)=0$</p> <p>Si a est fixé $d\Sigma = 0$ et $dV_g = 0$</p> <p>Donc $dG^* = (p_e - p_l) dV_l$</p> <p>G^* étant un potentiel thermo, il est minimal à l'équilibre donc $\frac{\partial G^*}{\partial V_l} = 0 \Rightarrow p_e = p_l$</p> <p>La pression du liquide est donc égale à la pression extérieure</p>
I.B.2	<p>Si a varie $V_g = \frac{4}{3} \pi a^3 \Rightarrow dV_g = 4 \pi a^2 da$ et $\Sigma = 4 \pi a^2 \Rightarrow d\Sigma = 8 \pi a da$</p> <p>Donc $dG^* = (p_e - p_g) dV_g + A d\Sigma = dG^* = (p_e - p_g) 4 \pi a^2 da + A 8 \pi a da = [(p_e - p_g) + \frac{2A}{a}] da$</p> <p>Donc là encore, G^* étant minimal à l'équilibre $\frac{\partial G^*}{\partial a} = 0 \Rightarrow p_e - p_g + \frac{2A}{a} = 0$</p>
I.B.3	<p>$n_l - n_g \Rightarrow dn_l = -dn_g$ A a, donc Σ et V fixés : $dG^* = \mu_g dn_g + \mu_l dn_l = (\mu_g - \mu_l) dn_g$</p> <p>$G^*$ étant minimal à l'équilibre $\frac{\partial G^*}{\partial n_g} = 0 \Rightarrow \mu_l = \mu_g$</p>
I.B.4	<p>A l'équilibre, G^* est minimal. Toutes les dérivées partielles sont donc nulles. Les trois équations obtenues précédemment sont donc vérifiées.</p> <p>$\mu_l = \mu_g \Rightarrow \mu_g^0 + RT \ln \frac{p_g}{p^0} = \mu_l^0 + RT \ln \frac{C}{C^0}$ avec $p_g = p_e + \frac{2A}{a}$ et $p_l = p_e$</p> <p>donc $\mu_g^0 + RT \ln \frac{p_e + \frac{2A}{a_{\text{eq}}}}{p^0} = \mu_l^0 + RT \ln \frac{C}{C^0}$</p>
I.B.5	<p>Pour $a \rightarrow \infty$ $\mu_g^0 + RT \ln \frac{p_\infty}{p^0} = \mu_l^0 + RT \ln \frac{C}{C^0}$ Pour $a = a_{\text{eq}}$ $\mu_g^0 + RT \ln \frac{p_e + \frac{2A}{a_{\text{eq}}}}{p^0} = \mu_l^0 + RT \ln \frac{C}{C^0}$</p> <p>Donc $p_e + \frac{2A}{a_{\text{eq}}} = p_\infty$ soit $a_{\text{eq}} = \frac{2A}{p_\infty - p_e}$</p>
I.C.1	<p>G^* est bien maximal pour $a = a_{\text{eq}}$: il s'agit d'une position d'équilibre instable.</p>
I.C.2	<p>G^* est un potentiel thermo : il décroît spontanément : donc seules les bulles de rayon supérieur à</p>
	<p>$a_c = a_{\text{eq}}$ peuvent voir leur rayon croître spontanément.</p>
I.C.3	<p>$a_c = a_{\text{eq}} = \frac{2A}{p_\infty - p_e} = \frac{2 * 710^{-2}}{(3-1)10^5} = 710^{-7} \text{ m} = 0.7 \mu\text{m}$</p> <p>la présence de défauts, de poussières (torchon utilisé pour essuyer les verres) favorise la croissance de bulles à la surface du verre.</p>

PROBLEME 2 : désintégration de l'Uranium 235 (Centrale PC 2010)**I A- Diffusion de neutrons**

1°) 1 kg comporte $N_{av.}(1000/235) = 2,56 \cdot 10^{24}$ noyaux, ce qui produit **$7,0 \cdot 10^{13} \text{ J}$**

2°) Cette masse est équivalente au point de vue énergie à $7,0 \cdot 10^{13}/4,2 \cdot 10^9 = \mathbf{1,7 \cdot 10^4}$ tonnes de TNT.

3°) a) Le terme $-\text{div} \mathbf{J} dV$ est le flux de neutrons entrant dans l'élément de volume mésoscopique dV (cf théo. flux-divergence) ; le terme $(\nu-1)N dV/\tau$ est le terme de « création-disparition » de neutrons dans dV .

b) τ peut être qualifié de « constante de temps » dans la réaction (à l'échelle mésoscopique).

c) Pour chaque réaction, il disparaît 1 neutron et il en apparaît ν en moyenne.

I B- Masse critique

1°) a) On reporte d'abord dans l'équation bilan donnée $N=N_1(r) \exp(\nu't/\tau)$, ce qui donne :

$$(\nu' - \nu + 1) N_1(r) = D \tau \Delta N_1(r)$$

On développe avec le formulaire: $\Delta N_1(r) = N_1''(r) + (2/r)N_1'(r)$

Puis on utilise le changement proposé : $g(r) = r N_1'(r)$, en dérivant 2 fois : $g''(r) = r N_1''(r) + 2N_1'(r)$

On constate donc que : $(\nu' - \nu + 1) N_1(r) = D \tau g''(r)/r$, c'est à dire que : $\boxed{g''(r) - (\nu' - \nu + 1)/(D\tau) g(r) = 0}$

Posons : $T = (\nu' - \nu + 1)/(D\tau)$

- Si $T > 0$, la solution s'écrit : $N_1(r) = (A/r) \exp(T^{1/2}r) + (B/r) \exp(-T^{1/2}r)$, qui tend vers l'infini en $r=0$: cela ne convient pas.
- Si $T < 0$, on note (énoncé) : $\alpha = (-T)^{1/2}$, la solution s'écrit : $N_1(r) = (A/r) \sin(\alpha r) + (B/r) \cos(\alpha r)$. Pour répondre aux critères de l'énoncé, on doit prendre $B=0$ et $\alpha R = \pi$. Donc : $(\pi/R)^2 = -T = (\nu - \nu' - 1)/(D\tau)$, ce qui donne bien la réponse de l'énoncé : $\boxed{\nu' = \nu - 1 - D\tau (\pi/R)^2}$.

b) Si la masse de combustible R augmente, ν' augmente, et le terme $\exp(\nu't/\tau)$ augmente plus vite au cours du temps.

c) Si $\nu' > 0$, la réaction s'emballé (exponentielle croissante) ; si $\nu' < 0$ la réaction s'arrête.

d) Pour une réaction explosive, il faut donc $\nu' > 0$, ce qui conduit à $R > R_c$ avec $\boxed{R_c = [\pi^2 D\tau / (\nu - 1)]^{1/2}}$

e) AN : $R_c = \mathbf{0,12 \text{ m}}$ $M_c = \rho \cdot 4/3 \cdot \pi R_c^3 = \mathbf{141 \text{ kg}}$.

2°) On « prépare » 2 morceaux de masse inférieure à M_c , et dont la somme des masse est supérieure à M_c , puis on les « met en contact ».

PROBLEME 3A : dessine-moi un mouton (CCINP MP 2019)**I.1 - Propriétés de la toison de laine**

Q1. On a : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$ donc $[Puissance] L^{-2} = [\lambda][Température] L^{-1}$
ainsi $\boxed{[\lambda] = [Puissance][Température]^{-1} L^{-1}}$ (soit $[\lambda] = M.L.T^{-3}[Température]^{-1}$)

Q2. La température ne dépendant que de z et de t , \vec{j}_Q est selon $\boxed{\vec{e}_z}$ et ne dépendant que de z et de t .

Q3. Premier principe de la thermodynamique (PPT) appliqué à une tranche de matériaux, comprise entre z et $z + dz$, en notant $S = LH$:

$$d^2 U = \delta^2 Q + \delta^2 W$$

$$\square d^2 U = \mu S dz c (T(z, t+dt) - T(z, t)) = \mu S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\square \delta^2 Q = \delta Q_{entrant} - \delta Q_{sortant} = j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz S dt$$

$$\square \delta^2 W = 0 \text{ car le solide est considéré indéformable.}$$

$$\text{Ainsi : } \mu S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz S dt \text{ soit } \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}$$

$$\text{or } \vec{j}_Q = -\lambda \text{grad}(T) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \text{ donc } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Q4. En régime stationnaire T ne dépend pas du temps donc : $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

On a alors $T(z) = Az + B$ avec A et B des constantes.

Donc $\vec{j}_Q = -\lambda A \vec{e}_z$, donc \vec{j}_Q ne dépend pas de z .

Q5. La puissance thermique vérifie : $\varphi = j_Q L H = -\lambda A L H$

Or $T(z=0) = B = T_{\text{entrée}}$ et $T(z=e) = Ae + T_{\text{entrée}} = T_{\text{sortie}}$ donc $A = \frac{T_{\text{sortie}} - T_{\text{entrée}}}{e}$

$$\text{ainsi } \varphi = \lambda L H \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{e}$$

Q6. La résistance thermique est définie par analogie avec la loi d'Ohm :

$$R_{th} = \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{\varphi} \text{ donc } R_{th} = \frac{e}{\lambda L H}$$

Une association de résistances thermiques en série correspond à un ensemble de matériaux traversés par un même flux thermique.

La résistance thermique totale est alors égale à la somme des résistances thermiques. (attendu ?)

Une association de résistances thermiques en parallèle correspond à un ensemble de matériaux soumis à la même différence de température.

On a alors $\frac{1}{R_{th,tot}} = \sum_i \frac{1}{R_{th,i}}$ (attendu ?)

Q7. Un échantillon de laine étant traversé par le flux φ on a d'après Q5 :

$$\varphi = \lambda_{\text{laine}} S \frac{T_c - T_f}{e} \text{ donc } \lambda_{\text{laine}} = \frac{e \varphi}{S(T_c - T_f)}$$

I.2 - Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

Q8. D'après Q6 on a : $R_{th} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} (2H^2 + 4LH)}$ soit $R_{th} = \frac{e}{2\lambda_{\text{laine}} H (2L + H)}$

AN : avant la tonte : $R_{th,M} = 1,8 \text{ W.K}^{-1}$ | après la tonte : $R_{th,m} = 9.10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$ |

Q9. On a : $R_{cc} = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}}{\varphi} = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}}{J_Q 2H(2L+H)}$ or $J_Q = h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$ (erreur de signe

dans l'énoncé) donc : $R_{cc} = \frac{1}{2hH(2L+H)}$ AN : $R_{cc} = 0,18 \text{ K.W}^{-1}$

Q10. On a : $R_r = (T_{ext} - T_{air}) / P_r$ or $P_r = K A (T_{ext} - T_{air})$ avec $A = 2H(2L + H)$

donc :
$$R_r = \frac{1}{2KH(2L+H)}$$

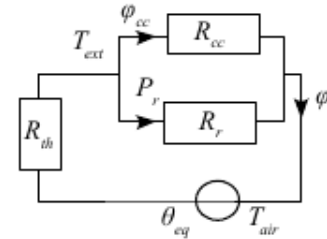
Q11. R_{cc} et R_r sont soumises à la même différence de température.

Schéma électrique équivalent :

Résistance équivalente :
$$R_{eq} = R_{th} + \frac{1}{(1/R_r) + (1/R_{cc})}$$

donc
$$R_{eq} = \frac{e}{2\lambda_{laine}H(2L+H)} + \frac{1}{2H(2L+H)(K+h)}$$

soit
$$R_{eq} = \frac{1}{2H(2L+H)} \left(\frac{e}{\lambda_{laine}} + \frac{1}{K+h} \right)$$



AN : avant la tonte : $R_1 = 1,9 \text{ K.W}^{-1}$ après la tonte : $R_2 = 0,17 \text{ K.W}^{-1}$

Q12. En plus des pertes par conducto-convection et rayonnement on ajoute la puissance nécessaire à la vaporisation de l'eau libérée. (erreur d'énoncé : ΔH_{vap}^o dans

les paramètres attendus au lieu de L)
$$P_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{vap}^o$$

Dans la situation de confort $T_{int} = \theta_{eq}$ et $T_{air} = T_0$ donc :

$$P_{m0} = \frac{\theta_{eq} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{vap}^o$$
 AN : $P_{m0} = 18 \text{ W}$

Q13. Après la tonte pour une température inférieure à $5,1^\circ\text{C}$ (seule la résistance thermique change) :
$$P_{m0}' = \frac{\theta_{eq} - T_0}{R_2} + \dot{m} \Delta H_{vap}^o$$
 AN : $P_{m0}' = 200 \text{ W}$

I.3 - Déséquilibre thermique d'une brebis (situations de stress et de danger)

Q14.a. PPT appliqué à la brebis non tondue, entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q + \delta W$$
 (on peut aussi utiliser $dH = \delta Q$ car la transfo est isobare)

▫
$$dU = \mu L H^2 c (T(t+dt) - T(t)) = \mu L H^2 c \frac{dT}{dt} dt$$

▫
$$\delta Q = \delta Q_{\text{métabolisme}} + \delta Q_{\text{évap}} + \delta Q_{\text{transferts}} = \left(p_m - \dot{m} \Delta H_{vap}^o - \frac{T - T_{air}}{R_1} \right) dt$$

▫ $\delta W = 0$ car la brebis est considérée indéformable.

Ainsi :
$$\mu L H^2 c \frac{dT}{dt} = p_m - \left(\dot{m} \Delta H_{vap}^o + \frac{T - T_{air}}{R_1} \right)$$

donc
$$\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{air}}{R_1 \mu L H^2 c} = \frac{p_m - \dot{m} \Delta H_{vap}^o}{\mu L H^2 c}$$

soit
$$\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{air}}{\tau_1} = \frac{T_1 - T_{air}}{\tau_1}$$
 avec $\tau_1 = R_1 \mu L H^2 c$ et $T_1 - T_{air} = R_1 (p_m - \dot{m} \Delta H_{vap}^o)$

or d'après Q12 $P_{m0} = \frac{\theta_{eq} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{vap}^o$ donc
$$T_1 - T_{air} = (\theta_{eq} - T_0) + R_1 (p_m - P_{m0})$$

Q14.b. L'équation se simplifie en : $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau_1} = \frac{T_1}{\tau_1}$ donc : $T(t) = Ae^{-t/\tau_1} + T_1$ avec A une constante. Or $T(0) = A + T_1 = \theta_{eq}$ donc $T(t) = (\theta_{eq} - T_1)e^{-t/\tau_1} + T_1$

Q14.c. AN : $\tau_1 = 7,2 \cdot 10^5 s = 8,3 \text{ jours}$

$T_1 = T_{air} + (\theta_{eq} - T_0) + R_1(p_m - p_{m0})$ donc pour $p_m = p_{m0}$ on a :

$T_1 = T_{air} + \theta_{eq} - T_0$ AN pour $T_{air} = 17^\circ C$: $T_1 = 51^\circ C$

Rem : ceci est beaucoup trop pour la brebis, car T_1 correspond à la température finale.

Q15. On a d'après Q14.a. : $p_m = p_{m0} + \frac{(T_1 - T_{air}) - (\theta_{eq} - T_0)}{R_1}$

or on veut que $T_1 = \theta_{eq}$ donc $p_m = p_{m0} + \frac{T_0 - T_{air}}{R_1}$

AN pour $T_{air} = -8^\circ C$: $p_m = 25 W$ et pour $T_{air} = 17^\circ C$: $p_m = 12 W$
donc $12 W < p_m < 25 W$

Q16. PPT appliqué à la brebis tondue, entre t et $t + dt$:

$dH = \delta Q$ car la transformation est isobare

◦ $dH = \mu L H^2 c \frac{dT}{dt} dt$ (comme en Q14.a)

◦ $\delta Q = \left(p_m - 3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o - \frac{T - T_{air}}{R_2} \right) dt$ (perte d'eau par la peau pour $T_{air} > T_0$)

Ainsi : $\mu L H^2 c \frac{dT}{dt} = p_m - \left(3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o + \frac{T - T_{air}}{R_2} \right)$

donc $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{air}}{R_2 \mu L H^2 c} = \frac{p_m - 3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o}{\mu L H^2 c}$

soit $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{air}}{\tau_2} = \frac{T_2 - T_{air}}{\tau_2}$ avec $\tau_2 = R_2 \mu L H^2 c$ et $T_2 - T_{air} = R_2 (p_m - 3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o)$

donc $T_2 = T_{air} + R_2 (p_m - 3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o)$

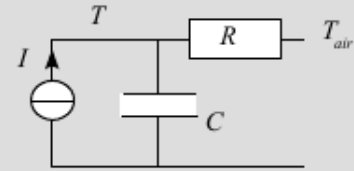
or d'après Q12 $p_{m0} = \frac{\theta_{eq} - T_0}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{vap}^o$ donc $T_2 = T_{air} + R_2 \left(\frac{3(\theta_{eq} - T_0)}{R_1} + (p_m - 3 p_{m0}) \right)$

on a $\tau_2 / \tau_1 = R_2 / R_1$ or d'après Q11 $R_2 \ll R_1$ donc $\tau_2 \ll \tau_1$ la brebis tondue change de température beaucoup plus vite que la brebis non tondue.

On souhaite avoir $T_2 = \theta_{eq}$ donc $T_{air} = \theta_{eq} - R_2 (p_m - 3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o)$

La température T_{air} maximale supportable correspond à la valeur minimale de p_m trouvée en Q15 : AN : $T_{air, max} = 44^\circ C$

Q17. Une source de courant modélise l'apport d'énergie thermique par le métabolisme et la perte par évaporation. La capacité thermique de la brebis est modélisée par un condensateur, les pertes thermiques par une résistance.



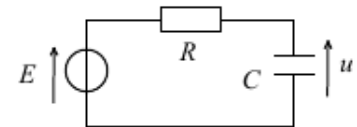
Avec pour la situation (1) $I = p_m - \dot{m} \Delta H_{vap}^o$ soit

$$I = \frac{T_1 - T_{air}}{R_1} \quad \text{d'après Q14.a ; } C = \mu L H^2 c = \tau_1 / R_1 \quad \text{et } R = R_1$$

pour la situation (2) : $I = p_m - 3 \dot{m} \Delta H_{vap}^o$ soit $I = \frac{T_2 - T_{air}}{R_2}$ d'après Q16 ;

$$C = \mu L H^2 c = \tau_2 / R_2 \quad \text{et } R = R_2$$

Autre approche (plus simple) : En raisonnant uniquement avec l'équation différentielle, qui correspond à un circuit RC série avec une source de tension :

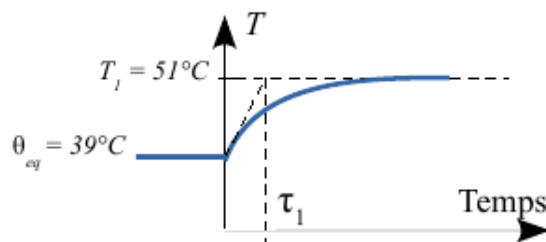


Avec pour la situation :

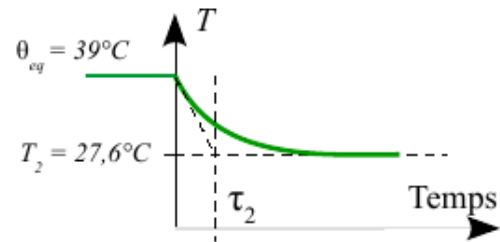
$$(1) \quad u = T - T_{air} ; E = T_1 - T_{air} ; C = \mu L H^2 c = \tau_1 / R_1 \quad \text{et } R = R_1$$

$$(2) \quad u = T - T_{air} ; E = T_2 - T_{air} ; C = \mu L H^2 c = \tau_2 / R_2 \quad \text{et } R = R_2$$

Situation (1) avec $p_m = p_{m0}$ et $T_{air} = 17^\circ C$; $T_1 = 51^\circ C$



Situation (2) avec $p_m = p_{m0}$ et $T_2 = 27,6^\circ C$;



Q18. On a : $C_6H_{12}O_6 + 6 O_2 = 6 CO_2 + 6 H_2O$

Énergie apportée à la brebis : $Q_{méta} = -\Delta_r H^o \xi$ or $n_{O_2} = \frac{PV}{RT} = 6 \xi$

donc $Q_{méta} = -\Delta_r H^o \frac{PV}{6RT}$ AN : $Q_{méta} = 20,2 \text{ kJ}$ par litre de O_2 à $5^\circ C$ et 1 bar

D'après Q12, en situation de confort il faut $p_{m0} = \frac{\delta Q_{méta}}{dt}$ soit $p_{m0} = \frac{-\Delta_r H^o}{6} \frac{dn_{O_2}}{dt}$

donc $\frac{\delta n_{O_2}}{dt} = -\frac{6 p_{m0}}{\Delta_r H^o}$ AN : $\frac{\delta n_{O_2}}{dt} = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot s^{-1}$ soit $\frac{\delta n_{O_2}}{dt} = 2,3 \text{ mmol} \cdot \text{min}^{-1}$

I.4 - Réponse d'un groupe de brebis

Q19. Diminution de surface par rapport aux brebis isolées :

On ne considère que les surfaces « latérales », car les surface supérieures et inférieures ne changent pas.

$$\Delta S_1 = 10 H^2 ;$$

$$\Delta S_{1'} = 10 H L \text{ soit } \Delta S_{1'} = 10 X H^2 \text{ soit } \Delta S_{1'} = 33 H^2 ;$$

$$\Delta S_2 = 12(H^2 + H L) - (4 H^2 + 6 H L) \text{ donc } \Delta S_2 = H(8 H + 6 L) \text{ soit } \Delta S_2 = (8 + 6 X) H^2$$

$$\text{soit } \Delta S_2 = 27,8 H^2$$

$$\Delta S_{2'} = 12(H^2 + H L) - (6 H^2 + 4 H L) \text{ donc } \Delta S_{2'} = H(6 H + 8 L)$$

$$\text{soit } \Delta S_{2'} = (6 + 8 X) H^2 \text{ soit } \Delta S_{2'} = 32,4 H^2$$

La conductance thermique est d'autant plus faible que la surface de contact avec l'air est faible, c'est donc le cas 1' qui a la plus faible conductance thermique. C'est dans cette configuration que les brebis ont intérêt à se regrouper.

Rem : Instinctivement on aurait choisi le cas 2' car la tête est plus sensible au froid, mais ce modèle ne prend pas cela en compte.

D'après Q12 pour une brebis non tondue isolée : $P_{m, dispersé} = \frac{\theta_{eq} - T_{air}}{R_1} + \dot{m} \Delta H_{vap}^o$

pour 6 brebis dans le cas 1' : $6 P_{m, 1'} = \frac{\theta_{eq} - T_{air}}{R_{th, 1'}} + 6 \dot{m} \Delta H_{vap}^o$

$$\text{avec } R_{th, 1'} = \frac{1}{14 H L + 12 H^2} \left(\frac{e}{\lambda_{laine}} + \frac{1}{K+h} \right) = R_1 \frac{2 H (2 L + H)}{H (14 L + 12 H)}$$

Diminution relative de métabolisme nécessaire : $r = \frac{P_{m, dispersé} - P_{m, 1'}}{P_{m, dispersé}}$

$$r = \frac{\theta_{eq} - T_{air}}{P_{m, dispersé}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{6 R_{th, 1'}} \right) \text{ soit } r = \frac{\theta_{eq} - T_{air}}{R_1 P_{m, dispersé}} \left(\frac{14 L + 12 H}{2 (2 L + H)} - 1 \right)$$

AN : tout dépend de T_{air} ce qui est logique, car l'intérêt du regroupement en dépend. Or T_{air} n'est pas donné dans l'énoncé...

En considérant qu'il y ait une erreur d'énoncé et que l'on nous demande la diminution relative des pertes thermiques par conducto-convection et rayonnement (effet de la vapeur d'eau émise non pris en compte) :

Ces pertes sont proportionnelle à la surface de contact avec l'air on a donc :

$$r = \frac{\Delta S_{1'}}{S_{dispersées}} \text{ soit } r = \frac{33 H^2}{6 * 2 H (2 L + H)} = \frac{33}{6 * 2 * 7,6} \text{ soit } r = 36\%$$

Les brebis des extrémités ont intérêt à changer de place car elles perdent plus d'énergie que les autres.

PROBLEME 3B : température dans le tunnel de Fréjus (Mines-Ponts PC 2016)

I. A) Evolutions saisonnières

1) La température moyenne est Θ_0 .

La température max est $\Theta_0 + T_0$
min $\Theta_0 - T_0$.

Proposition de valeur pour T_0 : 15°C .

2) $d\Phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{m} dS dt$ où \vec{m} est la normale à la surface élémentaire, orientée dans le sens où le flux est compté positivement.

$$[j_Q] = \frac{\text{énergie}}{\text{surface} \times T} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T} = MT^{-3}$$

3) Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -K \text{grad} T$, valable dans un milieu isotrope et pour des variations de température pas trop brutales.

$$[K] = \frac{MT^{-3}}{^\circ L^{-1}} = MLT^{-3}^\circ^{-1}$$

$$4) \int_z^{z+d_3} \underbrace{j_Q(z)}_{\downarrow d\Phi_Q(z)} \quad \delta Q = d\Phi_Q(z) - d\Phi_Q(z+d_3)$$

5) Dans une tranche mésoscopique, il y a beaucoup d'atomes, la notion de température y a donc un sens. Comme elle est fine, on peut supposer la température uniforme à l'intérieur.

6) 1^{er} principe appliqué à la tranche:

$$dU = \delta Q = -j_Q(z+d_3) S dt + j_Q(z) S dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} d_3 S dt$$

Par ailleurs $dU = \underbrace{e_s S d_3 c_s}_{\substack{\text{capacité} \\ \text{th de la} \\ \text{tranche}}} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} dt}_{\substack{\text{variation} \\ \text{de temp de} \\ \text{la tranche en } z}}$

$$7) j_Q = -K \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{donc} \quad dU = +K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} d_3 S dt$$

$$d'au \quad e_s S d_3 c_s \frac{\partial T}{\partial t} dt = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} d_3 S dt$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{e_s c_s} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad D = \frac{K}{e_s c_s} \quad [D] = L^2 T^{-1}$$

D

- 8) La forme de solution $T = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \frac{\alpha}{2} z)}$ est ondulatoire :
la variation de température au sommet se propage dans la roche.

On la remplace dans l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$i\omega = D(-i\frac{\alpha}{2})^2 = -D\frac{\alpha^2}{4}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = -\frac{i\omega}{D} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1-i) = \alpha' + i\alpha''$$

α' → propagation, vitesse de phase

α'' → absorption

$$T(z,t) = \Theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \alpha' z)} e^{-\alpha'' z}$$

$$T(z,t) = \Theta_0 + T_0 \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z}$$

9) $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z_c} = 0,01$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z_c = \ln(0,01) \Rightarrow z_c = -\sqrt{\frac{2D}{\omega}} \ln(0,01)$$

$$AN: D = \frac{\kappa}{\rho c_p} = \frac{3,00}{2,65 \cdot 10^3 \times 8,50 \cdot 10^3} = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = \frac{2\pi}{86400 \times 365} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$z_c = -\sqrt{\frac{2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-7}}{1,99 \cdot 10^{-7}}} \ln(0,01) = 5,32 \text{ m}$$

$z_c \ll$ altitude du Fréjus, donc la température dans le tunnel est constante.

- 10) Pour des variations quotidiennes de température, $\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$.

$$e^{-\sqrt{\frac{2\omega}{D}} z_c} = e^{-\sqrt{\frac{2 \cdot 7,27 \cdot 10^{-5}}{1,33 \cdot 10^{-7}}} \cdot 5,32} = 4 \cdot 10^{-77} !$$

Les variations de basse fréquence se propagent plus profondément : le sol se comporte comme un filtre passe-bas.

I. B) Température d'origine géophysique.

- 11) Bilan thermique en régime stationnaire sur la tranche $[z, z+dz]$

$$\frac{dU}{dt} = 0 = j_Q(z)S - j_Q(z+dz)S + P(z)S dz$$

12) On en déduit $\frac{dj_Q}{dz} = P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$

$$j_Q(z) = -H P_0 e^{-\frac{z}{H}} + cte$$

On $j_Q(z=L_c) = -j_m = -H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}} + cte$

$$\Rightarrow j_Q(z) = H P_0 \left(e^{-\frac{L_c}{H}} - e^{-\frac{z}{H}} \right) - j_m$$

$$j_Q(z) = -K \frac{dT}{dz} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{H P_0}{K} \left(e^{-\frac{z}{H}} - e^{-\frac{L_c}{H}} \right) + \frac{j_m}{K}$$

$$T(z) = \frac{j_m - H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}}}{K} z - \frac{H^2 P_0}{K} e^{-\frac{z}{H}} + cte.$$

$$T(0) = -\frac{H^2 P_0}{K} + cte = \Theta_0$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{j_m - H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}}}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \right) + \Theta_0$$

13) $j_S = j_Q(z=0) = H P_0 \left(e^{-\frac{L_c}{H}} - 1 \right) - j_m.$

14) Comparons j_m et $H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}}$

$$H P_0 e^{-\frac{L_c}{H}} = 10 \cdot 10^3 \cdot 2,50 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-\frac{45}{10}} = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

$$j_m = 0,035 \text{ W/m}^2 \text{ domine}$$

$$\text{Donc } T(z) = \frac{j_m}{K} z + \frac{H^2 P_0}{K} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \right) + \Theta_0.$$

$$T(z=1,7 \text{ km}) = \frac{0,035}{3,00} \cdot 1,7 \cdot 10^3 + \frac{(10^4)^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}}{3,00} \left(1 - e^{-\frac{1,7}{10}} \right) + 0^\circ\text{C}$$

$$= 19,8 \quad + 13,0 \quad + 0 = 32,8^\circ\text{C}$$

$$j_S = H P_0 \left(e^{-\frac{L_c}{H}} - 1 \right) - j_m$$

$$= 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \left(e^{-\frac{45}{10}} - 1 \right) - 0,035 = -0,060 \text{ W/m}^2$$

le sol émet de l'énergie thermique.

I. c) Prise en compte du relief.

15) Si on ne prend pas en compte la source d'énergie thermique dans la roche, l'équation de la chaleur 2D est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \text{ en régime stationnaire}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Supposons que T est à variables séparables : $T(x, z) = \beta(x) g(z) + cte$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \beta''(x) g(z) \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \beta(x) g''(z)$$

$$\beta''(x) g(z) = -\beta(x) g''(z) \Rightarrow \underbrace{\frac{\beta''}{\beta}}_{\text{fonction de } x} = -\underbrace{\frac{g''}{g}}_{\text{fonction de } z} = cte$$

$$\beta'' = cte f \text{ et } g'' + cte g = 0$$

On veut une solution oscillante en x et exponentielle en z , donc $cte < 0$

On note $cte = -k^2$

$$\beta''(x) + k^2 \beta(x) = 0$$

$$g''(z) - k^2 g(z) = 0$$

$$\beta(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$$g(z) = C e^{-kz} + D e^{kz}$$

A, B, C, D constantes

Les conditions aux limites permettent d'avoir $D = 0$ et $B = 0$

$$T(x, z) = K \cos kx e^{-kz} + cte, \quad K \text{ constante}$$

$$T(x, z=0) = T_1 \cos kx + T_5 \Rightarrow K = T_1 \text{ et } cte = T_5$$

$$T(x, z) = T_1 \cos(kx) e^{-kz} + T_5$$

La présence de la montagne fait que l'invariance par translation x supposée dans les parties précédentes n'est pas une hypothèse correcte.

Ici la montagne est encore absente, mais la température de surface est cohérente avec le relief.

16) En présence des sources internes d'énergie thermiques on avait

$$\frac{dj_a}{dz} = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

à 2 D on obtient $\operatorname{div}(\vec{j}_0) = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}$
 $-k \Delta T = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{k} e^{-\frac{z}{H}}$$

On cherche une solution sous la forme $T(x, z) = T_1 \cos(kx) e^{-\frac{z}{H}} + \beta(z) + T_5$

$\beta(z)$ s'identifie à la solution étudiée au I.R : elle vérifie

$$\beta''(z) = -\frac{\rho_0}{k} e^{-\frac{z}{H}}$$

Avec b.c., $T(x, z) = T_1 \cos kx e^{-\frac{z}{H}} + \frac{j_m}{k} z + \frac{H^2 \rho_0}{k} (1 - e^{-\frac{z}{H}}) + T_5$

17) $T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

En surface on a $j_s = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } T(x, z=0) &= T(x, z=h) + \frac{j_s}{k} h \\ &= T_5 + \frac{j_s}{k} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\ &= \Theta_0 + \beta z + \underbrace{\frac{j_s h_0}{k}}_{T_1} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$T(x, z) = \underbrace{\Theta_0}_{c_1} + \underbrace{\left(\beta + \frac{j_m}{k}\right) z}_{c_2} + \underbrace{\frac{H^2 \rho_0}{k} (1 - e^{-z/H})}_{c_3} + \underbrace{\frac{j_s}{k} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\frac{z}{H}}}_{c_3}$$

$\frac{z}{H} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$

rem: l'ajout de βz ne perturbe pas car sa dérivée seconde est nulle.