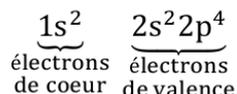


## INSTABILITE DE KELVIN-HELMOLTZ DANS L'ATMOSPHERE (Centrale PSI 2022)

### 1. Etude de deux composants de l'atmosphère : le dioxygène et l'ozone.

- Q1** La configuration électronique de l'atome d'oxygène dans son état fondamental s'écrit :



L'atome d'oxygène possède donc 2 électrons de cœur et 6 électrons de valence.

- Q2** Il appartient à la deuxième période (et à la 16<sup>e</sup> colonne).  
**Q3** Les isotopes d'un élément chimique donné possèdent le même nombre de protons (et d'électrons, bien sûr) mais diffèrent par leur nombre de neutrons.

Le noyau des isotopes de l'oxygène contient :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{16}\text{O} : 8 \text{ protons et } 8 \text{ neutrons} \\ {}^{17}\text{O} : 8 \text{ protons et } 9 \text{ neutrons} \\ {}^{18}\text{O} : 8 \text{ protons et } 10 \text{ neutrons} \end{array} \right.$$

Ce sont les électrons de valence, seuls, qui déterminent les propriétés chimiques d'un atome. Ces trois isotopes ont 6 électrons de valence : ils ont donc les mêmes propriétés chimiques.

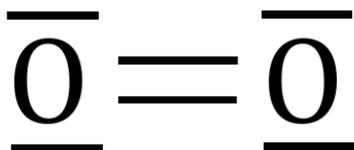
- Q4** On note  $\bar{M}$  la masse molaire moyenne de l'oxygène et  $M_{16}$ ,  $M_{17}$  et  $M_{18}$  les masses molaires respectives des isotopes  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{17}\text{O}$  et  ${}^{18}\text{O}$ . On peut écrire, en introduisant les fractions massiques  $x_{16}$ ,  $x_{17}$  et  $x_{18}$  :

$$\begin{cases} \bar{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18} \\ x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1 \end{cases}$$

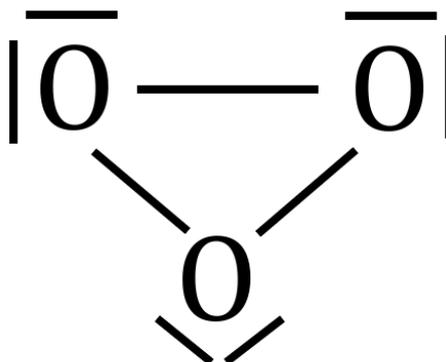
Comme on connaît  $x_{17} = 0,037 \%$ , on en déduit :

$$\begin{cases} x_{16} = \frac{M_{18} + x_{17}(M_{18} - M_{17}) - \bar{M}}{M_{18} - M_{16}} = 99,794 \% \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} = 0,169 \% \end{cases}$$

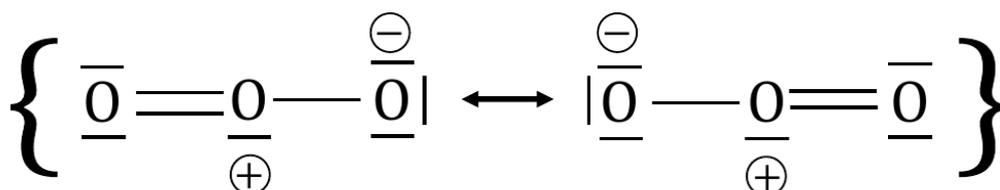
- Q5**



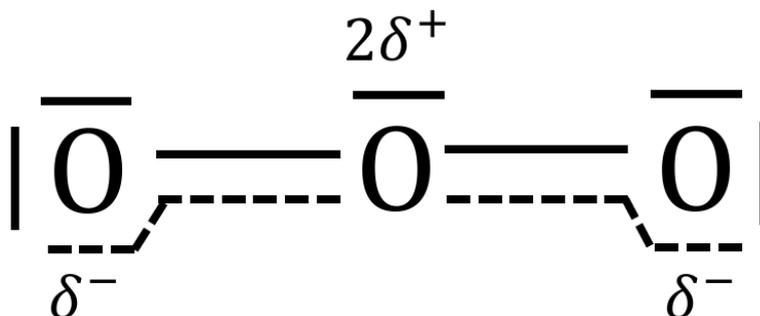
- Q6** Si la molécule d'ozone était cyclique, elle présenterait un centre de symétrie et ne serait donc pas polaire. De plus, aucun excès et aucun défaut de charge n'apparaît, ce qui confirmerait son caractère apolaire.



- Q7** Les deux formes mésomères de la molécule d'ozone sont les suivantes :

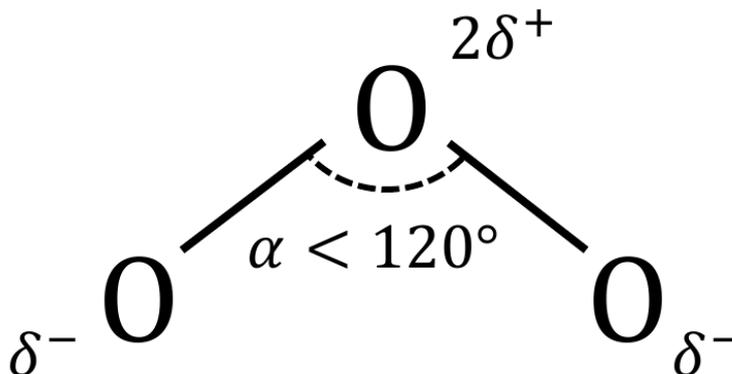


Un meilleur schéma est le suivant (la délocalisation électronique provient de la résonance entre les deux formes mésomères) :



La molécule est donc du type  $AX_2E_1$  (deux liaisons assimilées à des liaisons simples et un doublet non-liant sur l'atome central). La méthode VSEPR donne donc une

molécule coudée (mais avec un angle entre les deux liaisons inférieur à  $120^\circ$ , en raison du caractère répulsif du doublet non-liant) :



- Q8** Par définition de l'énergie de liaison et compte tenu de la présence des coefficients stœchiométriques  $\frac{1}{2}$ ,

$$\Delta_r H_1^\circ = \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{A}) + \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{B} - \text{B})}{2}$$

Le cycle permet d'écrire la combinaison linéaire :

$$\Delta_r H_2^\circ = \Delta_r H_1^\circ - \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{B})$$

On en déduit :

$$\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{B}) = \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{A} - \text{A}) + \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{B} - \text{B})}{2} - \Delta_r H_2^\circ$$

- Q9** On envisage l'état intermédiaire  $2\text{H}_{(\text{g})} + \text{O}_{(\text{g})}$ . Un raisonnement analogue au précédent donne :

$$\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}) = \Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{H} - \text{H}) + \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O})}{2} - 2\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{H})$$

On en déduit :

$$\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O}) = 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}) + 4\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{H}) - 2\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{H} - \text{H})$$

Numériquement, on trouve :

$$\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O}) = 496 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Q10** La relation de Planck-Einstein liant l'énergie  $\epsilon$  d'un photon à sa fréquence  $\nu$  s'écrit :

$$\epsilon = h\nu$$

où  $h$  est la constante de Planck.

- Q11** Le photon doit avoir exactement l'énergie nécessaire pour briser la liaison  $\text{O} - \text{O}$ . Par conséquent :

$$\epsilon = \frac{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O})}{N_A}$$

Or, la longueur d'onde du photon est donnée par  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\epsilon}$ . On en déduit :

$$\lambda = \frac{\mathcal{N}_A hc}{\Delta_{\text{dis}} H^\circ(\text{O} - \text{O})} = 0,241 \mu\text{m}$$

Il s'agit d'un rayonnement infrarouge.

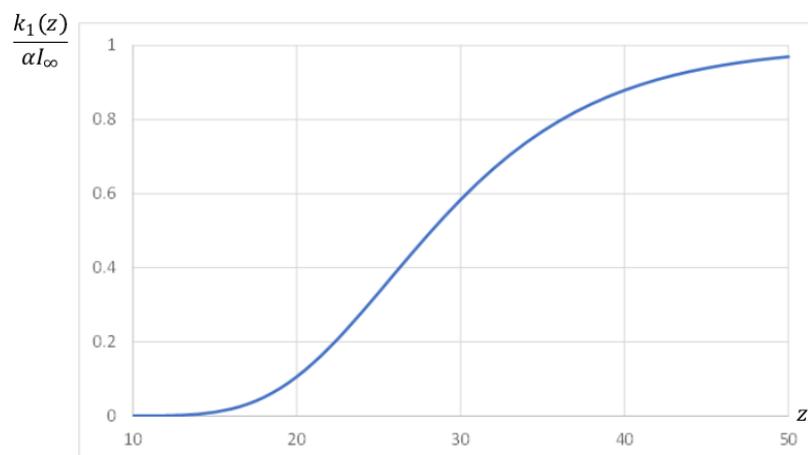
**Q12** Les rayonnements sont d'autant plus dangereux qu'ils sont plus énergétiques. Par conséquent, plus la longueur d'onde est petite, plus les rayonnements sont dangereux.

Les rayonnements infrarouges ne sont pas particulièrement dangereux, étant moins énergétiques que les rayonnements visibles. Or, ils ont tendance à être absorbés dans la haute atmosphère pour briser des liaisons O – O, tandis que les ultraviolets, bien plus énergétiques, traversent la haute atmosphère sans être absorbés.

**Q13** La constante de vitesse  $k_1(z)$  est proportionnelle à l'intensité  $I(z)$  du rayonnement UV qui croît avec l'altitude :  $k_1(z) = \alpha I(z)$ . C'est donc une fonction croissante de  $z$ .

- La puissance absorbée par une tranche  $[z, z + dz]$  de stratosphère est proportionnelle à  $I(z)$  et à la concentration  $n_{\text{O}_2}(z)$ .
- Au voisinage de  $z = 50 \text{ km}$ ,  $n_{\text{O}_2} \approx 0$ . Donc la puissance absorbée par la tranche  $[z, z + dz]$  est quasi-nulle. On en déduit que pour  $z \lesssim 50 \text{ km}$ ,  $I(z)$  décroît très lentement quand  $z$  décroît. Il en est donc de même de  $k_1(z)$ .
- Au voisinage de  $z = 0$ ,  $I \approx 0$  car il y a beaucoup de dioxygène. On en déduit que pour  $z \gtrsim 0$ ,  $I(z)$  décroît aussi très lentement quand  $z$  décroît. Il en est donc de même de  $k_1(z)$ .
- « Entre les deux »,  $I(z)$  et  $n_{\text{O}_2}(z)$  ont des valeurs significatives. Par conséquent, on s'attend à une décroissance plus marquée de  $I(z)$  quand  $z$  décroît. Il en est donc de même de  $k_1(z)$ .

L'allure de la courbe est donc la suivante (en prenant l'équation donnée dans l'énoncé pour  $I(z)$  ; on a tracé  $\frac{k_1(z)}{\alpha I_\infty}$  en fonction de  $z$ , en km) :



L'ozone ne peut se former que si :

- la concentration en  $O_2$  est suffisante car  $O_2$  est la « matière première » à partir de laquelle  $O_3$  est produit ;
- le rayonnement UV est d'intensité suffisante (la première étape est une photolyse) (i.e.  $k_1(z)$  pas trop faible), ce qui suppose que la concentration en  $O_2$  ne soit pas trop élevée, sans quoi les UV sont absorbés.

On en déduit que la concentration  $n_{O_3}$  doit présenter un maximum à une certaine altitude dans la stratosphère, résultant d'un compromis entre une concentration  $n_{O_2}$  pas trop faible mais pas trop élevée non plus pour que  $I(z)$  et donc  $k_1(z)$  soient suffisants.

**Q14** D'après le document A2,

$$n_{O_3}(z) = \sqrt{\frac{k_2 k_1(z)}{k_3 k_4}} n_{O_2}(z)$$

Par conséquent :

$$n_{O_3}(z) = n_0 \sqrt{\frac{\alpha I_\infty k_2}{k_3 k_4}} \exp \left[ -\frac{z}{H} - \frac{H n_0 \sigma_{O_2}}{\beta} \exp \left( -\frac{z}{H} \right) \right]$$

La fonction exponentielle étant croissante, il s'agit donc de chercher le maximum de la fonction  $f(z) = -\frac{z}{H} - \beta \exp \left( -\frac{z}{H} \right)$  où  $\beta = H n_0 \sigma_{O_2} \approx 39$ . On calcule sa dérivée :

$$f'(z) = \frac{1}{H} \left( \beta \exp \left( -\frac{z}{H} \right) - 1 \right)$$

Celle-ci s'annule pour

$$z_{\max} = H \ln \beta \approx 26 \text{ km}$$

D'autre part, l'énoncé fournit la valeur  $k_1(z = 50 \text{ km}) = 3 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ . Or,

$$k_1(z) = \alpha I_\infty \exp \left[ -\beta \exp \left( -\frac{z}{H} \right) \right]$$

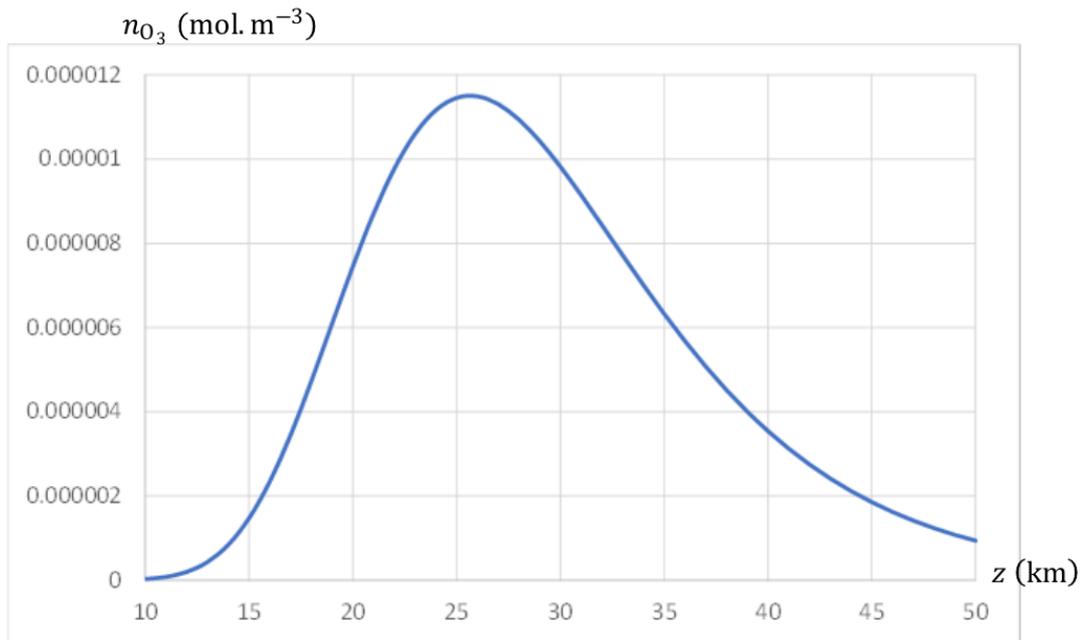
On en déduit  $\alpha I_\infty = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ . On en déduit :

$$n_{O_3, \max} = n_0 \sqrt{\frac{\alpha I_\infty k_2}{k_3 k_4}} \exp[-\ln \beta - \beta \exp(-\ln \beta)] = n_0 \sqrt{\frac{\alpha I_\infty k_2}{k_3 k_4}} \exp[-\ln \beta - 1]$$

Numériquement, on trouve :

$$n_{O_3, \max} \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

Par curiosité (mais ce n'était pas demandé), voici la courbe donnant  $n_{O_3}(z)$  :



## 2. Modélisation linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

**Q15** On écrit l'équation locale de la statique des fluides en projection sur l'axe Oz :

$$dp = -\rho g dz$$

**Q16** L'équation d'état des gaz parfaits donne  $\rho = \frac{Mp}{RT_0}$ . On en déduit :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

On intègre entre  $z = 0$  et  $z$  et on obtient :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$$

**Q17** Une mesure grossière au double décimètre donne une épaisseur du nuage de l'ordre de  $h = 850$  m. Or,  $H = \frac{RT_0}{Mg} = 7,97$  km  $\approx 8,0$  km. Le rapport de la pression en haut du nuage sur la pression en bas du nuage vaut donc :

$$\frac{p_{\text{haut}}}{p_{\text{bas}}} = \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$$

La variation de pression relative vaut donc :

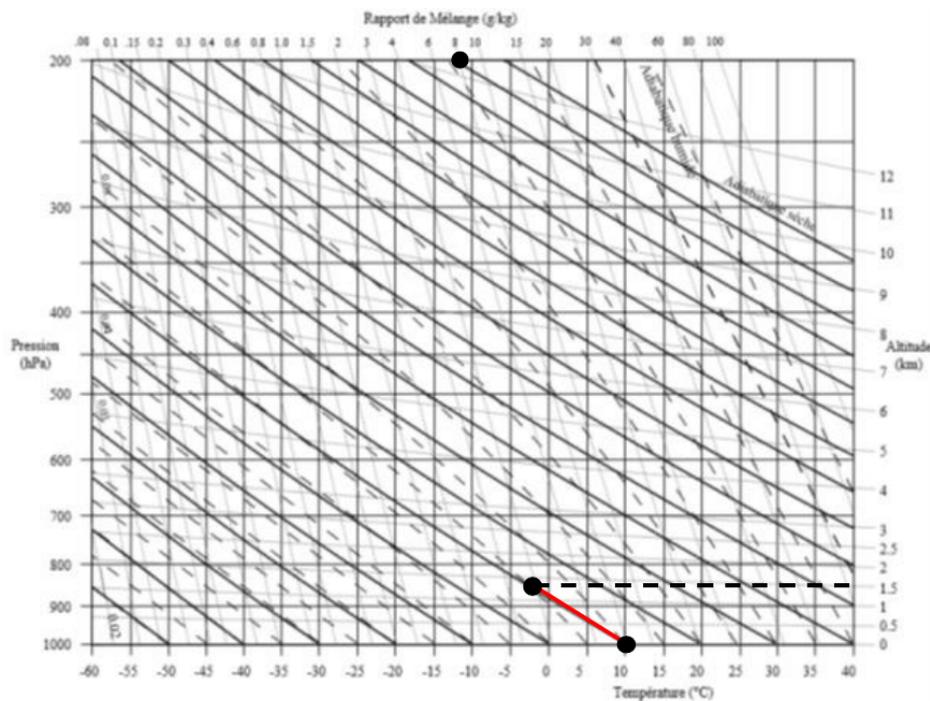
$$\frac{p_{\text{haut}} - p_{\text{bas}}}{p_{\text{bas}}} = \exp\left(-\frac{h}{H}\right) - 1 \approx -10,1 \%$$

On est à la limite de validité de l'approximation, mais c'est sans doute acceptable...

**Q18** On envisage le scénario suivant :

- Sous l'effet du vent, la masse d'air humide **s'élève** le long de la montagne.
- Comme **l'altitude augmente, la pression diminue**. L'air subit donc une **détente**. Le travail des forces de pression subies par une particule de fluide est donc négatif.
- Cette détente étant **rapide**, elle est **adiabatique**.
- Elle s'accompagne donc d'un **refroidissement**. En effet, le premier principe appliqué à une particule de fluide s'écrit :  $\Delta U = C_V \Delta T = W_{\text{press}} < 0$ .
- Ce refroidissement entraîne une **diminution de la pression  $p_s(T)$  de vapeur saturante** de l'eau.
- On en déduit que **l'humidité relative**  $HR = 100 \frac{p_{\text{vap}}}{p_s(T)}$  **augmente**.
- Celle-ci atteint éventuellement **le seuil de saturation**  $HR = 100$ . **Le nuage est alors formé**.

**Q19**



On part du point situé à  $z = 0$  (niveau du sol, notion vague...) pour lequel  $T = 10^\circ\text{C}$  (on remarque que ce point est relié par une courbe en gris clair au point noté  $r = 8 \text{ g/kg}$  : c'est cohérent avec les données de l'énoncé).

On suit une adiabatique sèche (pas encore d'eau liquide présente), jusqu'au premier point d'intersection avec une adiabatique humide (formation de la première goutte d'eau liquide). On lit l'altitude correspondante (par rapport au niveau du sol) :  $z \approx 1,5 \text{ km}$ .

Sur la photo, on estime le bas du nuage à une altitude valant environ  $z \approx 4,0 \text{ km}$ . Les résultats ne concordent pas...

**Q20** Comme l'écoulement est stationnaire, le débit de masse se conserve. Donc  $D_{m1}$  et  $D_{m2}$  sont indépendants de  $x$  (mais  $D_{m1} \neq D_{m2}$ , bien sûr).

Comme l'écoulement est incompressible, le débit de volume se conserve aussi. Donc  $D_{v1}$  et  $D_{v2}$  sont indépendants de  $x$  (mais  $D_{v1} \neq D_{v2}$ , bien sûr).

**Q21** L'air chaud a une densité inférieure à l'air froid :  $\rho_1 < \rho_2$ .

Si  $D_{m1} = D_{m2}$ ,  $\rho_1 S v_1 = \rho_2 S v_2$ . On en déduit :

$$v_1 > v_2$$

**Q22** La contrainte visqueuse exercée de bas en haut est donnée par :

$$\vec{C}_{\text{visc}} = \frac{d\vec{F}}{dS} = -\eta \frac{dv_x}{dz} \vec{u}_x$$

Le signe «-» traduit le fait que si  $\frac{dv_x}{dz} > 0$  (comme ici), les couches inférieures de fluide, moins rapides, freinent les couches supérieures de fluide, plus rapides.

**Q23** Le nombre de Reynolds est de l'ordre de :

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\eta} \approx \frac{1 \times (40 \times 3,6) \times 10^3}{10^{-5}} \approx 10^{10}$$

On en déduit que la convection domine très largement la viscosité. Les contraintes visqueuses étant négligeables, il est raisonnable de supposer  $\frac{dv_x}{dz} \approx 0$  dans les deux zones : le modèle de profil uniforme de vitesse proposé est donc adapté.

**Q24** Considérons une ligne de courant  $\mathcal{L}$  de l'écoulement. Si l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible et homogène, le théorème de Bernoulli stipule que :

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{constante}(\mathcal{L})$$

**Q25** Cf cours.

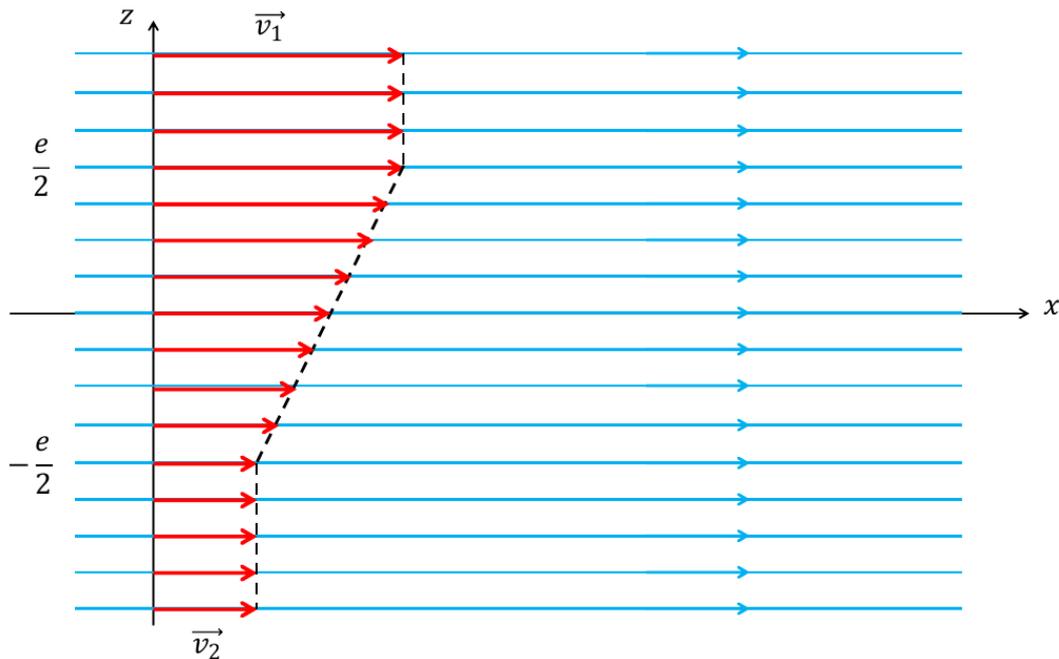
**Q26** La continuité du champ de vitesse en  $z = \pm \frac{e}{2}$  impose :

$$\begin{cases} \langle v \rangle + \frac{\gamma}{2} = v_1 \\ \langle v \rangle - \frac{\gamma}{2} = v_2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \gamma = v_1 - v_2 \end{cases}$$

## Q27



**Q28** On a bien  $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$  pour toute valeur de  $z$  : l'écoulement ainsi décrit est bien incompressible (et homogène).

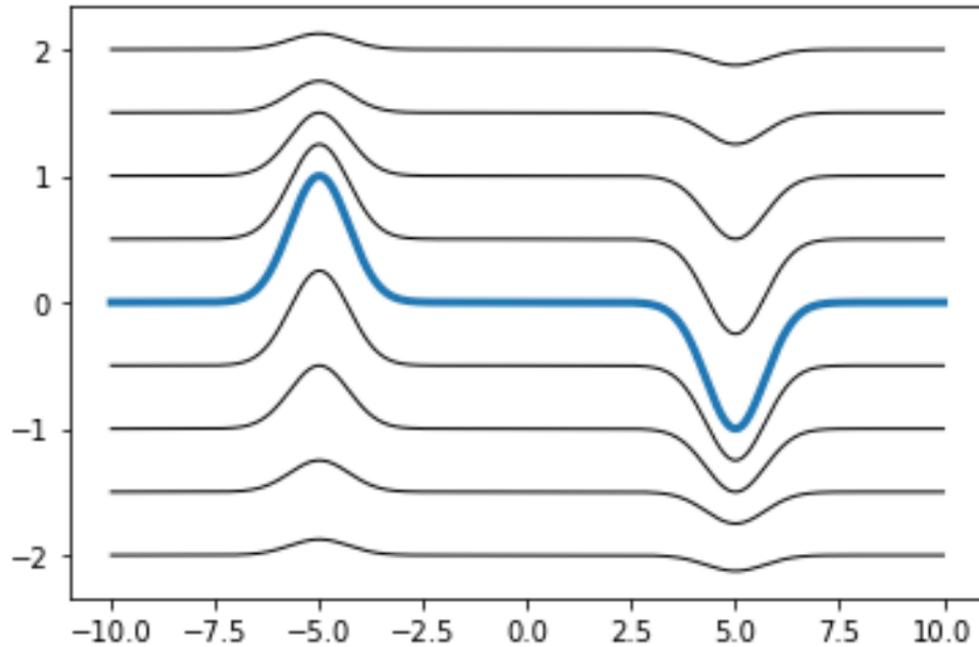
Pour  $|z| \geq \frac{e}{2}$ , l'écoulement est uniforme donc  $\frac{dv_x}{dz} = 0$  : il n'y a pas de contrainte visqueuse. C'est compatible avec un écoulement parfait.

En revanche, pour  $|z| \leq \frac{e}{2}$ ,  $\frac{dv_x}{dz} = \frac{\gamma}{e} = \frac{v_1 - v_2}{e} \neq 0$  : il y a donc des contraintes visqueuses dans la zone de mélange. L'écoulement n'y est pas parfait.

**Q29** Au niveau d'une **bosse** de déformation (comme sur la figure 5), la section du tube de courant d'air chaud diminue tandis que la section du tube de courant d'air froid augmente. La conservation du débit de volume entraîne donc une **augmentation de  $v_1$**  et une **diminution de  $v_2$** . Les lignes de courant d'air **chaud se resserrent** tandis que les lignes de courant d'air **froid s'écartent**.

Au niveau d'un **creux** de déformation, la situation est inversée :  **$v_1$  diminue** tandis que  **$v_2$  augmente**.

L'allure des lignes de courant au voisinage d'une bosse et d'un creux est la suivante :



- Q30** Comme l'écoulement est stationnaire, parfait, incompressible et homogène au-dessus et au-dessous de la ligne de séparation, le théorème de Bernoulli s'applique. En considérant deux lignes de courant  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  horizontales situées au voisinage de la ligne de séparation, on peut écrire :

$$\begin{cases} p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} = \text{constante}(\mathcal{L}_1) \\ p_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} = \text{constante}(\mathcal{L}_2) \end{cases}$$

Au niveau d'une bosse,  $v_1$  augmente tandis que  $v_2$  diminue. On en déduit que  $p_1$  diminue tandis que  $p_2$  augmente. Il y a donc apparition d'une surpression sous la bosse et d'une dépression au-dessus de la bosse. On a donc un gradient de pression vertical  $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ . Ce gradient de pression tendra à soulever la bosse encore davantage. La déformation initiale est donc amplifiée.

Au niveau d'un creux,  $v_1$  diminue tandis que  $v_2$  augmente. On en déduit que  $p_1$  augmente tandis que  $p_2$  diminue. Il y a donc apparition d'une dépression sous la bosse et d'une surpression au-dessus de la bosse. On a donc un gradient de pression vertical  $\frac{\partial p}{\partial z} > 0$ . Ce gradient de pression tendra à creuser le creux encore davantage. La déformation initiale est donc amplifiée.

Le système est donc instable : c'est l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

- Q31** La connaissance de la fonction courant  $\Psi(x, z, t)$  permet de tracer les lignes de courant. En effet, l'équation d'une ligne de courant  $\mathcal{L}$  s'écrit, à un instant donné :

$$\Psi(x, z, t) = \text{constante}(\mathcal{L})$$

L'analogie des lignes de niveau d'une carte topographique est ici les lignes iso-valeurs de la fonction courant  $\Psi(x, z, t)$  : il s'agit des lignes de courant de l'écoulement.

- Q32** Dans chaque domaine  $i = 1$  ou  $2$ ,  $v_b = v_i$  est uniforme. Donc dans chaque domaine,  $\frac{d^2 v_b}{dz^2} = 0$ . D'autre part,  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \exp i(kx - \omega t)$ . Enfin, par hypothèse,  $v_b \neq \underline{c}$ . On en déduit, dans chaque domaine :

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dz^2} - k^2 \Phi_i = 0$$

- Q33** La résolution de l'équation différentielle précédente donne, dans chaque domaine :

$$\begin{cases} \Phi_1(z) = \alpha_1 \exp(kz) + \beta_1 \exp(-kz) & \text{pour } z \geq 0 \\ \Phi_2(z) = \alpha_2 \exp(kz) + \beta_2 \exp(-kz) & \text{pour } z \leq 0 \end{cases}$$

La non-divergence de ces deux fonctions impose  $\alpha_1 = 0$  et  $\beta_2 = 0$ .

La condition aux limites en  $z = 0$  entraîne :  $\beta_1 = A_1$  et  $\alpha_2 = A_2$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \Phi_1(z) = A_1 \exp(-kz) \\ \Phi_2(z) = A_2 \exp(kz) \end{cases}$$

- Q34** Le système linéaire homogène en  $(A_1, A_2)$  n'admet de solution non identiquement nulle que si les deux équations sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire proportionnelles. Le déterminant du système doit donc être nul :

$$(v_1 - \underline{c})^2 + (v_2 - \underline{c})^2 = 0$$

On peut récrire cette équation sous la forme :

$$(v_1 - \underline{c})^2 = -(v_2 - \underline{c})^2$$

c'est-à-dire :

$$v_1 - \underline{c} = \pm i(v_2 - \underline{c})$$

On en déduit :

$$\underline{c}^\pm = \frac{v_1 \mp i v_2}{1 \mp i} = \frac{(v_1 \mp i v_2)(1 \pm i)}{2}$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\underline{c}^\pm = \frac{v_1 + v_2}{2} \pm i \left( \frac{v_1 - v_2}{2} \right) = \langle V \rangle \pm i \frac{\Gamma}{2}$$

avec :

$$\begin{cases} \langle V \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \Gamma = v_1 - v_2 \end{cases}$$

**Q35** Par définition,  $\underline{c} = \frac{\omega}{k}$ . La relation de dispersion s'écrit donc :

$$\underline{\omega}^{\pm} = k\langle V \rangle \pm i \frac{k\Gamma}{2}$$

**Q36** La fonction courant complexe s'écrit :

$$\underline{\Psi}(x, z, t) = \Phi(z) \exp i(kx - (\omega_{\text{re}} + i\omega_{\text{im}})t) = \Phi(z) \exp(\omega_{\text{im}}t) \exp i(kx - \omega_{\text{re}}t)$$

La fonction courant réelle s'écrit donc :

$$\Psi(x, z, t) = \Phi(z) \exp(\omega_{\text{im}}t) \cos(kx - \omega_{\text{re}}t)$$

Elle contient donc un facteur de propagation  $\cos(kx - \omega_{\text{re}}t)$  que l'on peut mettre sous la forme :

$$\cos(kx - \omega_{\text{re}}t) = \cos \left[ k \left( x - \frac{\omega_{\text{re}}}{k} t \right) \right]$$

On voit donc apparaître naturellement la vitesse de propagation de la phase de l'onde, ou vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega_{\text{re}}}{k}$$

$\omega_{\text{re}} = \text{Re}(\underline{\omega})$  a la même valeur pour les deux branches  $\underline{\omega}^{\pm}$  :  $\omega_{\text{re}} = k\langle V \rangle$ . Par conséquent :

$$v_{\varphi} = \langle V \rangle$$

**Q37** La vitesse de phase est la même pour les deux branches de propagation et elle est positive. Par conséquent, l'onde se propage vers les  $x$  croissants dans les deux cas.

D'autre part,  $v_{\varphi} = \langle V \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}$  ne dépend pas de  $k$  (ou de  $\omega_{\text{re}}$ , ce qui revient au même). Il n'y a donc pas dispersion.

**Q38** Au vu des résultats précédents,  $\omega_{\text{im}} = \pm \frac{k\Gamma}{2} = \pm\sigma$  et  $kz = \frac{z}{\delta}$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{k\Gamma}{2} \\ \delta = \frac{1}{k} \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$\begin{cases} \Psi(x, z \geq 0, t) = A_1 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(\pm\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)] \\ \Psi(x, z \leq 0, t) = A_2 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp(\pm\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)] \end{cases}$$

**Q39** L'instabilité ne peut se développer au cours du temps que si le facteur  $\exp(\pm\sigma t)$  est croissant. Cela correspond donc au cas  $\omega_{\text{im}} = +\frac{k\Gamma}{2} = +\sigma$ . Il s'agit donc de la branche

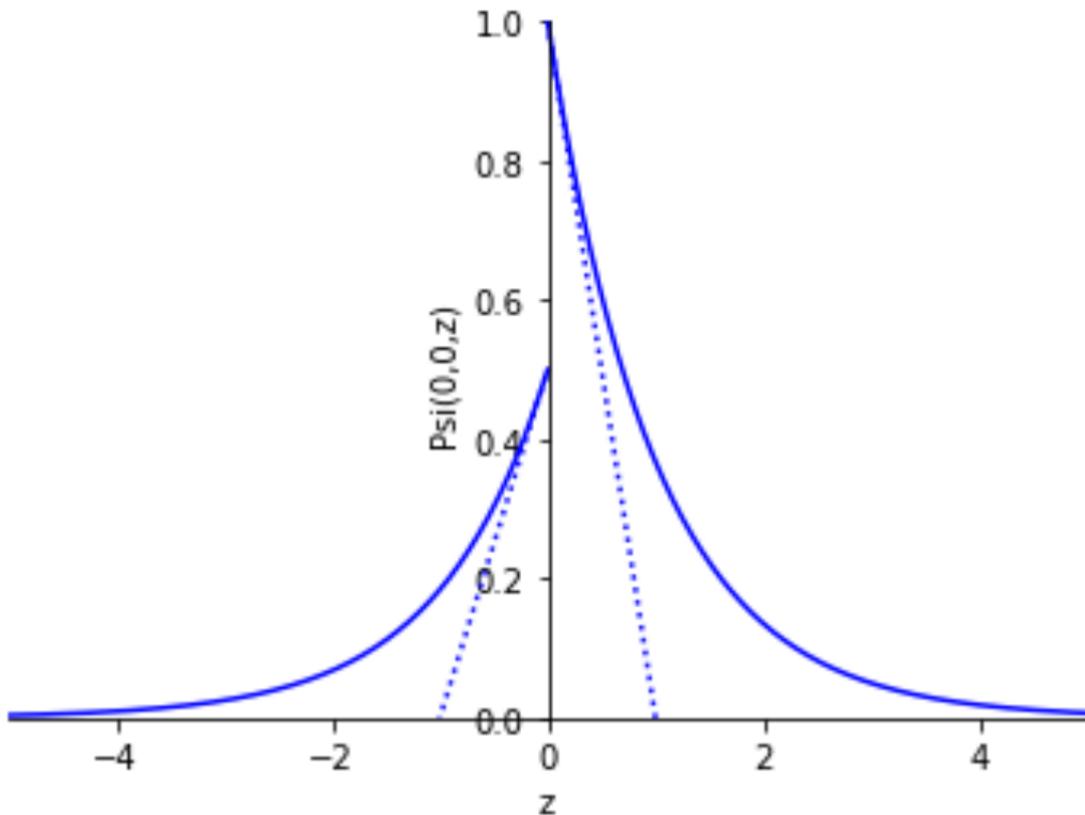
$$\underline{\omega}^+ = k\langle V \rangle + i\frac{k\Gamma}{2}$$

Le facteur d'amplification  $\exp(\sigma t) = \exp\left(\frac{k\Gamma}{2}t\right)$  est d'autant plus grand que  $\Gamma = v_1 - v_2$  est plus grand.

**Q40** On se place dans le cas où l'instabilité se développe. La fonction courant s'écrit donc finalement :

$$\begin{cases} \Psi(x, z \geq 0, t) = A_1 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)] \\ \Psi(x, z \leq 0, t) = A_2 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp(\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)] \end{cases}$$

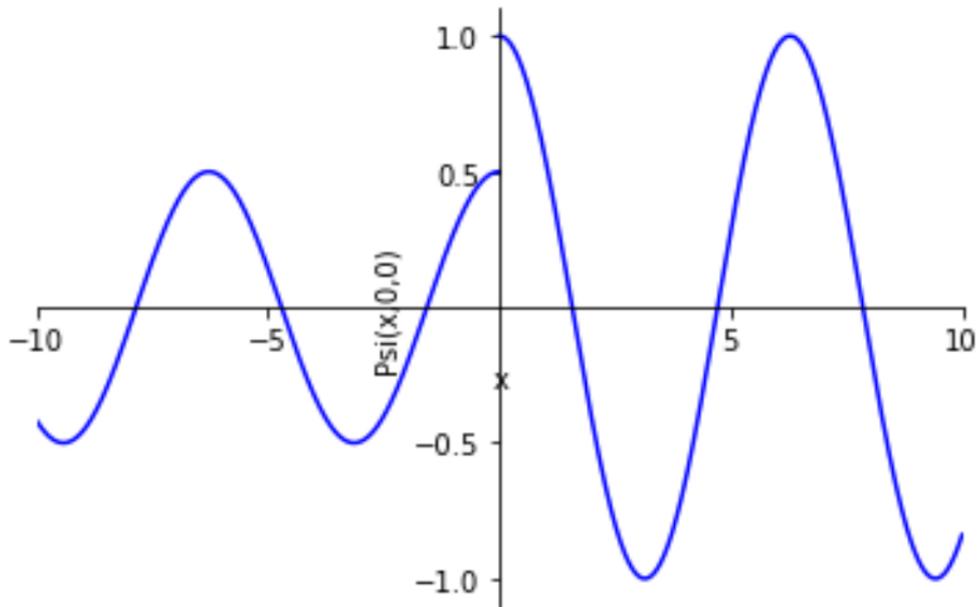
**Q41** Voici l'allure du profil de  $\Psi(0, z, 0)$  pour lequel on a choisi  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0,5$  et  $\delta = 1$  en unités arbitraires :



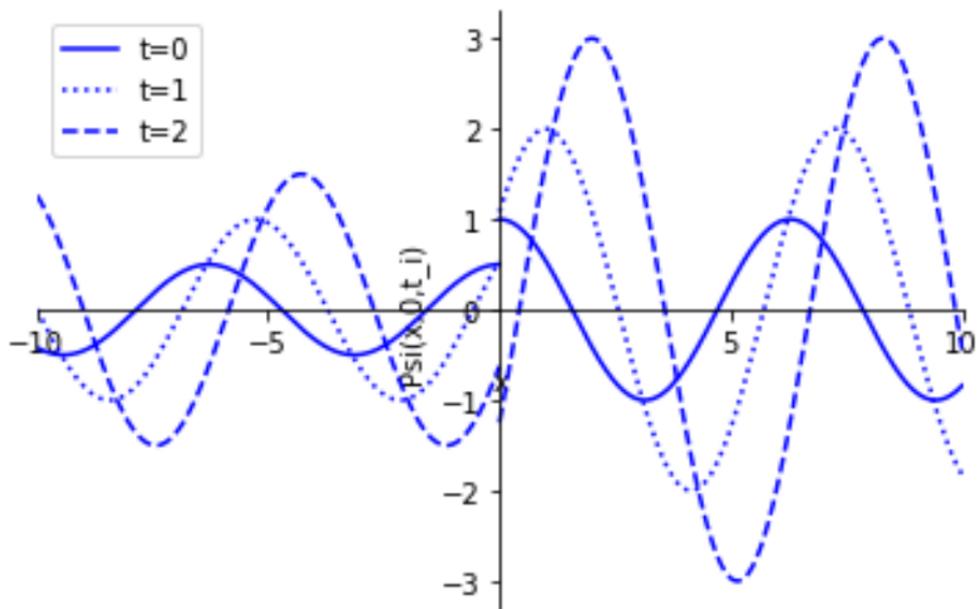
$\delta$  est la distance caractéristique de décroissance de  $\Psi(0, z, 0)$  autour de l'altitude moyenne de la couche de mélange. On peut donc assimiler  $2\delta$  à l'épaisseur du nuage ondulé.

Lorsque  $t$  varie,  $\Psi(0, z, t) \propto \exp\left(\pm\frac{z}{\delta}\right) \exp(\sigma t) \cos(k\langle V \rangle t)$ . Par conséquent,  $\Psi(0, z, t)$  voit son amplitude augmenter au cours du temps à cause du facteur  $\exp(\sigma t)$  et  $\Psi(0, z, t)$  change périodiquement de signe à cause du facteur  $\cos(k\langle V \rangle t)$ .

- Q42** Voici l'allure du profil de  $\Psi(x, 0, 0)$  pour lequel on a choisi  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0,5$  et  $k = 1$  en unités arbitraires :



Lorsque  $t$  varie,  $\Psi(x, 0, t) \propto \exp(\sigma t) \cos[k(x - \langle V \rangle t)]$ . Par conséquent,  $\Psi(x, 0, t)$  voit son amplitude augmenter au cours du temps à cause du facteur  $\exp(\sigma t)$  et  $\Psi(x, 0, t)$  se propage vers les  $x$  croissants à cause du facteur  $\cos[k(x - \langle V \rangle t)]$  :



- Q43** Le temps caractéristique de développement de l'instabilité correspond à la constante de temps  $\tau$  définie par :

$$\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) = \exp(\sigma t)$$

Par conséquent,

$$\tau = \frac{1}{\sigma} = \frac{2}{k\Gamma}$$

- **Première proposition :**

Le module du vecteur d'onde est donné par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde, ou période spatiale du phénomène selon l'axe  $Ox$ . Sur la photo 2, on observe 6 périodes spatiales et on mesure (au double décimètre) une distance d'environ 3,2 km. Donc  $\lambda \approx 540$  m.

On en déduit :

$$\tau = \frac{\lambda}{\pi\Gamma} \approx 17 \text{ s}$$

- **Deuxième proposition :**

D'après la question Q41, on peut estimer que l'épaisseur de la zone de transition, c'est-à-dire du nuage ondulé vaut environ  $e \approx 2\delta = \frac{2}{k}$ . On mesure  $e$  au double décimètre sur la photo et on trouve  $e \approx 600$  m. Par conséquent :

$$\tau = \frac{2}{k\Gamma} \approx \frac{e}{\Gamma} \approx 60 \text{ s}$$

Certes, il y a un rapport 3,5 entre les deux estimations mais l'ordre de grandeur reste le même. Il s'agit d'une durée courte à notre échelle. C'est donc bien en accord avec l'affirmation de l'énoncé.