

CORRIGE DU SUJET B PLUS DIFFICILE

CCINP PSI 2020 + Centrale PSI 2017

PARTIE CHIMIE : chlore et eau de javel (d'après CCINP PSI 2020)

Q33 ${}_{11}^{23}\text{Na}$ appartient à la $\left\{ \begin{array}{l} 3^{\text{e}} \text{ période} \\ 1^{\text{e}} \text{ colonne (des alcalins)} \end{array} \right.$ ① ②

${}_{17}^{35}\text{Cl}$ " " $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'avant-dernière colonne (les halogènes)} \\ 3^{\text{e}} \text{ période} \end{array} \right.$

Cl $Z=17$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$

Q34 Na fait partie des alcalins (K, Li)
Cl halogènes (F, Br)

Q35 G dépend de T , solvant, concentration des ions présents, de leur mobilité

cellule A: pour la conductimétrie
B: pour la pH-métrie (électrode de verre)

Q36 $G_{\text{NaCl}} = 780 \mu\text{S}$ pour une concentration en NaCl dissous égale à 6 mol/L (lecture graphique)

\Rightarrow la concentration du filtrat = 6 mol/L (car on a dilué au $\frac{1}{1000}$ e) $\Rightarrow \rho = 6 \text{ mol/L}$

Q37

+I	$\text{HClO} \text{ (A)}$ $\text{ClO}^- \text{ (D)}$
0	$\text{Cl}_2 \text{ (B)}$
-I	$\text{Cl}^- \text{ (C)}$

$\text{HClO} + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_3\text{O}^+ + \text{ClO}^-$
 acide base
 à pH + faible ③
 \Rightarrow ①

Q38 étape 2

on est en milieu basique

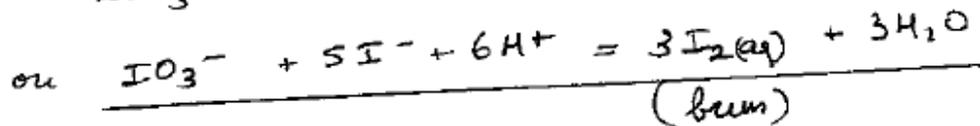
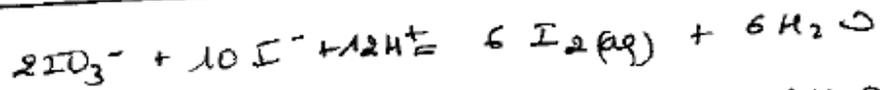
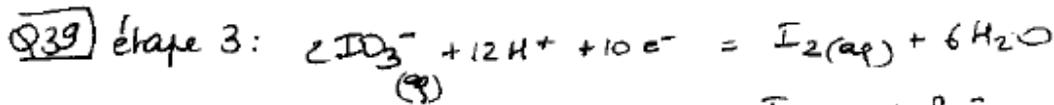
(x-1) $\text{IO}_3^- + 6\text{H}^+ + 6\text{e}^- = \text{I}^- + 3\text{H}_2\text{O}$ $\text{IO}_3^- / \text{I}^-$

(x3) $\text{ClO}^- + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$ $\text{ClO}^- / \text{Cl}^-$

$3\text{ClO}^- + \text{I}^- = \text{IO}_3^- + 3\text{Cl}^-$

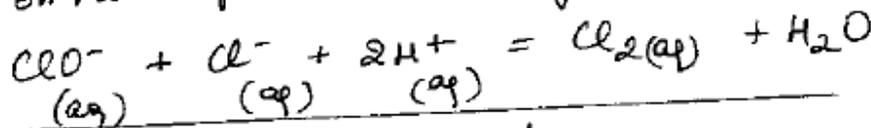
car ClO^- et I^- sont dans des domaines disjointés donc réagissent.

On met I^- en excès car on veut que le réactif limitant soit ClO^- i.e. l'eau de javel



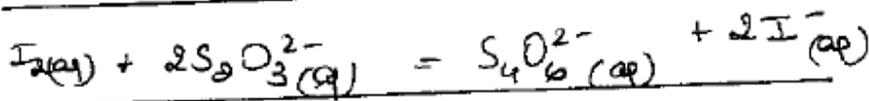
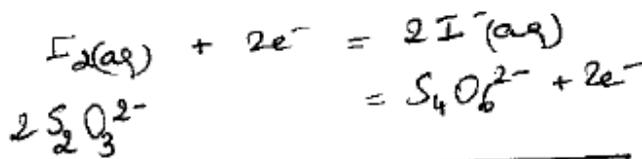
réaction de médiamutation

Q40) Si on ^{avait} acidifié avant l'ajout de I^- : on aurait eu



ou $Cl_2(g)$ est un gaz vert toxique.

Q41)



$\frac{n_{S_2O_3^{2-}}}{n_{I_2}} = 2$ et $\frac{n_{I_2}}{n_{IO_3^-}} = 3$ ainsi que $\frac{n_{IO_3^-}}{n_{ClO^-}} = \frac{1}{3}$
 $\Rightarrow n_{I_2} = n_{ClO^-}$

$\Rightarrow n_{S_2O_3^{2-}} = 2 n_{ClO^-}$

$C_2 V_{eq} = 2 \frac{C_0}{100} \times V_{init} \Rightarrow C_0 = 50 \frac{C_1 V_{eq}}{V_{init}}$

↳ on a dilué par 100

PARTIE PHYSIQUE : ELECTROFILTRE INDUSTRIEL (d'après Centrale PSI 2017)

I. Champ électrique dans un électrofiltre

I.A.1) Si l'espace est vide de charge, on a $\rho = 0$ et l'équation de Poisson devient l'équation de Laplace

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \boxed{\Delta V = 0}$$

I.A.2.a) Le système est invariant par rotation et par translation le long de l'axe Oz donc, on a $V = V(r)$. L'équation de Poisson s'écrit alors

$$\Delta V = 0 \implies \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \implies r \frac{dV}{dr} = A \implies V = A \ln(r) + B$$

On peut alors écrire les conditions limites pour en déduire les constantes A et B

$$\begin{aligned} V(r_c) = 0 &= A \ln(r_c) + B \\ V(r_e) = -U &= A \ln(r_e) + B \end{aligned} \implies \begin{aligned} A \ln(r_c/r_e) &= U \\ B &= -A \ln(r_c) \end{aligned} \implies \boxed{V = U \frac{\ln(\frac{r}{r_c})}{\ln(\frac{r_e}{r_c})}}$$

I.A.2.b) Connaissant le potentiel, on peut exprimer le champ électrique et écrire la condition d'ionisation

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{1}{r} \frac{U}{\ln(\frac{r_e}{r_c})} \vec{e}_r \implies E(r_e) = E_0 = \frac{1}{r_e} \frac{U}{\ln(\frac{r_e}{r_c})}$$

Donc la tension "seuil" est $\boxed{U_0 = E_0 r_e \ln(\frac{r_c}{r_e})}$

I.A.2.c) AN : $U_0 = 26,3 \text{ kV}$

I.A.3.a) Sur les collectrices, le potentiel devrait être nul. Sur les collectrices, on a $y = \pm s$ et le terme $\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)$ vaut alors 0 dans chaque terme de la somme. Chaque terme dans le ln vaut 1 et donc ce terme vaut 0. Donc on a bien $V(\pm s) = 0$ avec cette expression.

Dans le même ordre d'idée, on doit avoir le potentiel qui vaut $-U$ sur les émettrices. Ceci est vrai en tout point, donc notamment pour $x = 0$ et $y = \pm r_e$ soit

$$-U = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi m d}{s}\right) - \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m d}{s}\right) + \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)} \right) \implies \Lambda = - \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi m d}{s}\right) - \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m d}{s}\right) + \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)} \right) \right]^{-1}$$

C'est moche ... mais à part ça, je ne vois pas

I.A.3.b) Le champ électrique est perpendiculaire en tout point aux équipotentielles ce qui permet de tracer les lignes de champ.

On a $\text{div} \vec{E} = 0$ (puisque $\rho = 0$) donc normalement là où les lignes de champs sont serrées, on a un champ intense. Sans surprise, le champ est intense au voisinage de l'émettrice.

Le champ électrique s'annule là où des lignes de champ électrique se croisent. Donc oui, sur les points $(d + 2md, 0)$ le champ est nul (ce qui est logique par symétrie ...)

I.A.3.c) Sur l'émettrice donc en $y = r_e$, le champ est maximale et on a

$$|E_y|/(U/s) \simeq 23,5 \Rightarrow \frac{U_0}{s} = \frac{E_0}{23,5} \Rightarrow U_0 = \frac{E_0 s}{23,5}$$

AN = $U_0 = 28,1$ kV.

On trouve un ordre de grandeur sensiblement identique...

I.B.1) On a trouvé que \vec{E} est orienté selon $-\vec{e}_r$ soit $\vec{E} = E\vec{e}_r$ avec $E < 0$.

On a alors $\vec{j} = \rho\vec{v} = -b\rho\vec{E} = -b\rho E\vec{e}_r = j\vec{e}_r$ donc \vec{j} est orienté selon $-\vec{e}_r$ (puisque $\rho < 0$) donc les charges se déplacent radialement dans le sens entrant et i est orienté positivement vers l'intérieur.

On a donc trouvé $j = -b\rho E$

I.B.2) Par définition du courant, on a en choisissant la bonne orientation pour le compter positivement

$$i = \iint \vec{j} \cdot \underbrace{\vec{dS}}_{-dS\vec{e}_r} = -2\pi r h j = 2\pi r h b \rho E \Rightarrow \rho = \frac{i}{2\pi r h b E}$$

I.B.3) On va maintenant écrire l'équation de Maxwell-Gauss qui relie le champ électrique et la charge

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{drE}{dr} = \frac{i}{2\pi r h b \epsilon_0 E} \Rightarrow (\times r^2 E) \quad rE \frac{drE}{dr} = r \frac{i}{2\pi h b \epsilon_0}$$

I.B.4) On intègre entre r_0 et r pour trouver

$$\frac{(rE)^2 - (r_0 E_0)^2}{2} = \frac{r^2 - r_0^2}{2} \frac{i}{2\pi h b \epsilon_0} \Rightarrow E = -\frac{1}{r} \left((r_0 E_0)^2 + (r^2 - r_0^2) \frac{i}{2\pi h b \epsilon_0} \right)^{1/2}$$

I.B.5) Lorsque r devient grand, on garde le terme qui domine (donc le r^2 dans la racine), on a

$$E_{lim} = - \left(\frac{i}{2\pi h b \epsilon_0} \right)^{1/2}$$

AN : $|E_{lim}| = 2,85 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$

I.B.6) AN :

$$v_{lim} = bE_{lim} = 88,4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$|\rho| = \frac{i}{2\pi r_c h b E_{lim}} = 8,4 \cdot 10^{-6} \text{ C.m}^{-3}$$

$$n = \frac{|\rho|}{q_e} = 5,2 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$$

II.A.1.a) Il ne faut pas oublier que "loin" le champ est $E\vec{e}_z$ où $E < 0$ donc le champ est orienté "globalement" de droite à gauche.

Lorsqu'on rajoute la charge, il ne faut pas oublier que le champ E_1 est orienté "entrant", donc il va y avoir un point sur la sphère où le champ électrique s'annule (intersection des 2 lignes de champ, représentée par un point).

La charge subit une force $\vec{F} = q\vec{E}$ avec $q < 0$ et $E < 0$ donc la force (et la vitesse qui en découle) est orientée vers la droite.

II.A.1.b) On a

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Le point où le champ est nul tend vers le côté gauche de ma sphère est la portion de la sphère dont les lignes de champ "partent" se réduit.

L'accroissement de Q réduit donc la quantité de lignes de champ qui arrivent sur la sphère et ce sont ces lignes qui amènent les charges négatives (puisque la force est $q\vec{E}$ avec $q < 0$). Donc cela réduit l'arrivée de nouveaux anions.

II.A.1.c) Lorsque plus aucune ligne de champ n'atteint la sphère, la charge ne variera plus. Cela se passe lorsque le point où $E_t = 0$ est sur l'extrême gauche de la sphère soit $r = a$ et $\theta = \pi$, on a alors en ce point $\vec{e}_r = -\vec{e}_z$ et

$$\left(\vec{0} = \vec{E}_t = \vec{E} + E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} (-2\vec{e}_r) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_r \right) \cdot \vec{e}_z \Rightarrow 0 = E + 2E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

d'où finalement, comme prévu ...

$$Q_{lim} = 4\pi\epsilon_0 a^2 E \left(1 + 2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)$$

II.A.1.d) AN : $Q_{lim} = -6,9 \cdot 10^{-17} \text{ C}$.

Soit un nombre de charge $N = \frac{|Q|}{q_e} = 434$

II.A.2.a) En utilisant le système SI, on a

$$[\epsilon_0] = \text{F.m}^{-1} = \text{C.V}^{-1}.\text{m}^{-1} = \text{A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$$

$$[b] = \text{m}^2.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

$$[\rho] = \text{C.m}^{-3} = \text{A.s.m}^{-3}$$

On peut alors en déduire τ_Q par homogénéité (j'ai bidouillé on peut aussi écrire un système avec les différentes unités en jeu ...)

$$\tau_Q = 4 \frac{\epsilon_0}{|\rho|b}$$

II.A.2.b) AN : $\tau_Q = 2,3 \text{ ms}$

On veut atteindre 90% de la charge soit

$$Q = 0,9Q_{lim} = Q_{lim} \frac{t_{90}}{t_{90} + \tau_Q} \Rightarrow t_{90} = 9\tau_Q = 20,7 \text{ ms}$$

II.A.2.c) Le temps pour traverser le système vaut $\tau_C = L/u_0 = 10 \text{ s}$. Ce temps est très nettement supérieur à t_{90} donc la charge limite a tout le temps d'être atteinte (voire elle est même atteinte quasi instantanément)

II.B) Faisons le bilan des forces qui s'exercent sur une particule

— le poids bien entendu qu'on peut corriger de la poussée d'Archimède

$$\vec{P} = m_{eff}\vec{g} = -4/3\pi a^3(\mu - \mu_{air})g\vec{e}_z$$

— le frottement de l'air sur les poussières qu'on va prendre égal à la loi de Stokes $\vec{F}_d = -6\pi\eta a(\vec{v} - \vec{u}_0)$ (2 remarques : c'est la vitesse relative de la particule par rapport au fluide qui compte. pour appliquer Stokes il faut $Re \ll 1$ avec $Re = aw\mu_{air}/\eta$ mais on ne connaît pas w pour le moment ... on fait donc l'hypothèse et on croise les doigts!). Pour retrouver la loi de Stokes, on a écrit

$$|F_d| = \frac{1}{2}\rho w^2 \times S \times C_x = \frac{1}{2}\rho w^2 \times \pi a^2 \times \frac{24}{Re} = \frac{1}{2}\rho w^2 \times \pi a^2 \times \frac{\eta}{\rho w(2a)} = 6\pi a\eta w$$

— la force électrique $\vec{F}_{el} = Q_{lim}E\vec{e}_y$

On peut alors écrire le PFD pour une particule

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -4/3\pi a^3(\mu - \mu_{air})g\vec{e}_z + Q_{lim}E\vec{e}_y - 6\pi\eta a(\vec{v} - \vec{u}_0)$$

On a donc

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta a}{m}\vec{v} = \frac{6\pi\eta a}{m}\vec{u}_0 + \frac{Q_{lim}}{m}E\vec{e}_y - \left(1 - \frac{\mu_{air}}{\mu}\right)g\vec{e}_z$$

On peut vérifier rapidement que le poids doit avoir un impact faible en regardant le rapport de ce terme avec les 2 autres

$$\frac{P}{F_{el}} = 4,6.10^{-3} \quad \frac{P}{F_D} = 8,4.10^{-9}$$

Donc on peut bien négliger le poids ... On voit donc apparaître un temps caractéristique

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta a} = 3,6.10^{-5} \text{ s}$$

et une vitesse limite

$$v_{lim} = \vec{u}_0 + \frac{Q_{lim}}{6\pi\eta a}E\vec{e}_y$$

On a donc dans ce modèle $w_{lim} = \frac{Q_{lim}}{6\pi\eta a}E\vec{e}_y$

AN : $w_{lim} \simeq 7,6 \text{ cm.s}^{-1}$.

NB : Dans ces conditions, on a bien $Re = aw_{lim}\mu_{air}/\eta \ll 1$.

NB2 : dans cette histoire, je n'utilise pas la température de l'air ni k_B alors qu'ils sont fournis. Ca m'inquiète ... A la rigueur je pourrais calculer la vitesse d'agitation thermique mais je ne vois pas quoi en faire.

II.C.1) On regarde le nombre de Reynolds de l'écoulement de la fumée $Re = \frac{u_0 \rho_{air}}{\eta} = 5.10^3$.
Ce nombre est très grand et correspond bien à l'apparition d'un régime turbulent.

II.C.2.a) Les termes de variations sont pendant dt

- le nombre de particules qui entrent en $x : c(x)u_0 dt A$
- le nombre de particules qui sortent en $x + \Delta x : c(x + \Delta x)u_0 dt A$
- le nombre de particules absorbés au niveau des collectrices $c(x)w dt P \Delta x$ (on prend $c(x)$ car on a déjà le dt qui un infiniment petit d'ordre 1

On peut alors faire un bilan sur la tranche comprise entre x et $x + \Delta x$

$$N(t + dt) = N(t) + c(x)u_0 dt A - c(x + \Delta x)u_0 dt A - c(x)w dt P \Delta x$$

Bon j'ai anticipé ... ici on regarde la convection et $dN = (c(x) - c(x + \Delta x))u_0 dt A$

II.C.2.b) Les particules se déplacent à w donc pendant dt elles parcourent $w dt$ et seules à une distance inférieure à cette distance parcourue sont absorbées donc le volume est $P w dt \Delta x$ et le nombre absorbé vaut $dN_a = c(x)w dt P \Delta x$

II.C.2.c) Le bilan évoqué à la première question aboutit alors à

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{(c(x) - c(x + \Delta x))}_{-\frac{dc}{dx} \Delta x} A u_0 - P w c(x) \Delta x$$

En stationnaire, on a $\frac{dN}{dt} = 0$ et on a alors CQFD

$$\frac{dc}{dx} = -\frac{Pw}{Au_0} c(x)$$

II.C.2.d) On fait apparaître une distance caractéristique $L_c = \frac{Au_0}{Pw}$ et la résolution donne

$$c(x) = c_1 \exp\left(-\frac{x}{L_c}\right) \Rightarrow c_2 = c(L) = c_1 \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)$$

On en déduit alors le rendement

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{c_2}{c_1} = 1 - \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right)}$$

AN : $L_c = 1 \text{ m}$ et $\eta = 99,99\%!!$

II.C.3.a) J'imagine qu'il s'agit de l'approximation des milieux continus... En effet, l'air a un libre parcours moyen proche de la taille des particules donc on ne peut pas oublier le caractère corpusculaire du fluide.

II.C.3.b) w varie fortement en fonction de la taille des particules. Dès lors, la polydispersité des particules de fumée rend délicate le modèle précédent puisque w varie de deux ordres de grandeur selon la taille

II.C.3.c) Dans le modèle de Deutsch, on a $D_V = u_0 A$ et $A_c = PL$, le modèle de Mats et Ohnfeld s'écrit alors

$$\eta = 1 - \exp\left(-\left(\frac{w' A_c^k}{D_v}\right)\right) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{w' PL}{u_0 A}\right)^k\right)$$

or on a établi dans le modèle de Deutsch

$$1 - \exp\left(-\frac{w' PL}{u_0 A}\right)$$

On a donc $w' = w$ et $k = 1$...

II.C.3.d) AN : $\eta = 95,8\%$