

PARTIE I : étude du câble coaxial (CCINP PC 2018)

I.1 Le câble coaxial parfait

Q1. Lorsque le câble est fermé à son extrémité par un dipôle, le courant "revient" par la gaine. **Cependant, on ne se place pas dans l'ARQS ici, donc le courant n'a pas réellement besoin de "revenir"... La question peut donc troubler certains élèves...**

Q2. La loi des mailles donne, en notant u_L la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

Ensuite, la loi des nœuds donne, en notant i_C le courant qui "descend" dans le condensateur :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_C$$

Or $i_C = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ au premier ordre, et $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Q3. On dérive la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à l'espace, et on assimile les dérivées croisées : $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ (théorème de SCHWARTZ). Il vient alors :

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

De même, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t , et en assimilant les dérivées croisées de $i(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

On reconnaît dans les 2 cas une équation de D'ALEMBERT avec une célérité des ondes $v = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$.

v est bien une vitesse pour que l'équation reste homogène : $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ est en $V.s^{-2}$ et $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ est en $V.m^{-2}$ donc v est bien en $m.s^{-1}$.
Autre manière de le vérifier : $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la pulsation caractéristique d'un circuit RLC, donc en s^{-1} , or Γ et Λ sont des grandeurs linéiques donc $\sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$ est bien en $m.s^{-1}$.

Q4. On injecte la solution proposée dans l'équation de D'ALEMBERT. Comme $\frac{\partial^2 \underline{u}(x, t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{u}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 \underline{u}(x, t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 \underline{u}(x, t)$, celle-ci devient :

$$-k^2 \underline{u}(x, t) + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{u}(x, t) = 0 \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

On obtient la relation de dispersion usuelle associée à l'équation de D'ALEMBERT : en effet, on a cherché une solution en somme d'OPPM se propageant dans le sens des x croissants (terme en i_0) et décroissants (terme en i_1).

Q5. On injecte la solution proposée dans l'une des équations de couplage, par exemple $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$:

$$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} = -\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

On en déduit :

$$k\rho = \Lambda\omega \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$$

Si u est une tension et i une intensité, ρ et donc Z_c sont des impédances, homogènes à des résistances, donc en Ω .

Q6. On applique la loi d'OHM à l'extrémité du câble : $\underline{u}(d, t) = \underline{Z}i(d, t)$:

$$\rho i_0 e^{j(\omega t - kd)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kd)} = \underline{Z}i_0 e^{j(\omega t - kd)} + \underline{Z}i_1 e^{j(\omega t + kd)}$$

$$i_0(\rho - \underline{Z})e^{-jkd} = i_1(\rho + \underline{Z})e^{+jkd} \Rightarrow \mathbf{i_1 = i_0 \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}}$$

Q7. On note $\chi = \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$ le coefficient de réflexion pour exprimer $\underline{Z}_l(x)$:

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{u(x, t)}{i(x, t)} = \frac{\rho(i_0 e^{-jkx} - i_1 e^{+jkx})}{i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+jkx}}$$

$$\underline{Z}_l(x) = \rho \frac{e^{-jkx} - \chi e^{+jkx}}{e^{-jkx} + \chi e^{+jkx}} = \rho \frac{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkx} - (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkx} + (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}$$

$\underline{Z}_l(x)$ est donc indépendant de x si $\mathbf{\rho = \underline{Z} = Z_c}$. Dans ce cas, $\underline{Z}_l(x) = \rho$ et $\chi = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{i_1 = 0}$: il n'y a **pas d'onde réfléchi** : toute l'onde est transmise, ce qui optimise le transfert du signal. il faut donc mettre en bout de câble une impédance égale à Z_c ("adaptation d'impédance").

I.2 Le câble coaxial avec pertes

Q8. Les parties métalliques (gaine et âme) sont en métal non parfait, ayant une conductivité limitée, donc une certaine résistance : il y a donc des pertes par effet JOULE.

Q9. La loi des mailles donne cette fois :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L + u_R$$

Or $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$, $u_R = r dx i(x, t)$ et $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$ donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r i(x, t)$$

Par ailleurs, on a toujours $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ par la loi des nœuds. En dérivant la première équation par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En remplaçant avec la seconde équation, on obtient la relation demandée :

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}}$$

Q10. On injecte la solution proposée :

$$(-jk)^2 = \Gamma\Lambda(j\omega)^2 + r\Gamma j\omega$$

D'où la relation de dispersion : $\mathbf{k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - r\Gamma j\omega}$.

Q11. Si $\underline{k} = \alpha - j\beta$, on peut écrire $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$. Ainsi α correspond à l'aspect propagatif de l'onde, et β à l'absorption de l'onde (sur une distance caractéristique $1/\beta$). Si $\alpha > 0$, l'onde se propage vers les x croissants, donc $\beta > 0$ pour avoir une atténuation, cohérente avec la dissipation d'énergie par effet JOULE.

Q12. On a $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ et $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$, donc la puissance moyenne s'écrit :

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t)) = \frac{1}{2} u_0 i_0 e^{-2\beta x} = P_0 e^{-2\beta x}$$

On en déduit
$$A = \frac{10}{\ln 10} \frac{2\beta x}{x} = 2\beta \frac{10}{\ln 10}$$

Q13. On a $\underline{k}^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 - \frac{r \Gamma j \omega}{\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$. On passe à la puissance 1/2, puis on utilise le DL de $(1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$ (en admettant qu'il fonctionne pour les complexes et que la racine est définie également...) :

$$\underline{k} \approx \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \left(1 - \frac{r \Gamma j \omega}{2 \Gamma \Lambda \omega^2}\right)$$

On identifie la partie imaginaire de \underline{k} à β donc on trouve $\beta = \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \cdot \frac{r \Gamma \omega}{2 \Gamma \Lambda \omega^2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$. On reporte dans l'expression de A pour obtenir l'expression demandée :

$$A = 2\beta \frac{10}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

Q14. Le phénomène responsable est l'effet de peau : le champ EM ne pénètre dans un conducteur ohmique que sur une profondeur caractéristique $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, donc le courant ne circule que sur cette épaisseur caractéristique. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la section de conduction diminue donc la résistance augmente avec $r \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

PARTIE II : acoustique d'une mousse (Centrale PC 2019)

Q.1) Par identification dimensionnelle à partir de l'équation d'onde on obtient : $c_a = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \chi_a}}$

Q.2) Lors d'une transformation isentropique de l'air assimilé à un gaz parfait, p et V suivent la loi de Laplace : $pV^\gamma = Cte$

On différencie : $V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{V}{\gamma p} = -\frac{V}{\gamma(p_0+p)} \approx -\frac{V}{\gamma p_0}$ à l'ordre 0 en p (afin que l'équation d'onde reste d'ordre 1 en p conformément à l'approximation acoustique)

D'où $\chi_a = \frac{1}{\gamma p_0}$

Q.3) $c_a = 343 \text{ m.s}^{-1}$. $\chi_a = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$

Q.4) $c_e = \frac{1}{\sqrt{\mu_e \chi_e}}$; $c_e = 1,42 \text{ km.s}^{-1}$.

Q.5) $\underline{v}_i = \frac{p_i}{Z_a} = \frac{p_{i0}}{Z_a} \exp(j\omega t - kx)$ avec $Z_a = \mu_a c_a$ impédance acoustique de l'air.

Q.6) Onde incidente : $\begin{cases} \underline{p}_i = p_{i0} \exp(j(\omega t - kx)) \\ \underline{v}_i = \frac{p_{i0}}{Z_a} \exp(j(\omega t - kx)) \end{cases}$ Onde réfléchie : $\begin{cases} \underline{p}_r = p_{r0} \exp(j(\omega t + kx)) \\ \underline{v}_r = -\frac{p_{r0}}{Z_a} \exp(j(\omega t + kx)) \end{cases}$

D'où $r_p = \frac{p_{r0}}{p_{i0}} \exp(2jkL)$ et $r_v = -\frac{p_{r0}}{p_{i0}} \exp(2jkL) = -r_p$

En traduisant l'existence d'un nœud de pression acoustique en $x = 0$: $p_i(0,t) + p_r(0,t) = 0 \rightarrow p_{r0} = -p_{i0}$

D'où $r_p = -e^{2jkL}$ et $r_v = -r_p = e^{2jkL}$

Q.7) $\begin{cases} \underline{p}_r = -p_{i0} \exp(j(\omega t + kx)) \\ \underline{v}_r = \frac{p_{i0}}{Z_a} \exp(j(\omega t + kx)) \end{cases}$ soit en notation réelle : $\begin{cases} p_r = -p_{i0} \cos(\omega t + kx) \\ v_r = \frac{p_{i0}}{Z_a} \cos(\omega t + kx) \end{cases}$

Q.8) $p(x,t) = p_i(x,t) + p_r(x,t) = p_{i0}(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \rightarrow p(x,t) = 2p_{i0} \sin(\omega t) \sin(kx)$

$v(x,t) = v_i(x,t) + v_r(x,t) = \frac{p_{i0}}{Z_a} \cos(\omega t - kx) + \frac{p_{i0}}{Z_a} \cos(\omega t + kx) \rightarrow v(x,t) = 2 \frac{p_{i0}}{Z_a} \cos(\omega t) \cos(kx)$

On reconnaît une fonction d'onde à variables séparées typique d'une onde stationnaire.

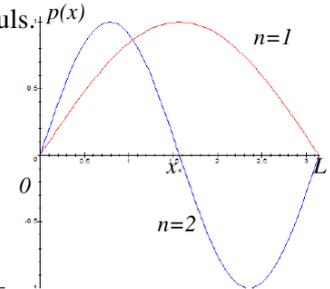
En $x = L$, $p(L, t) = 2p_{i0} \sin(\omega t) \sin(kL)$ avec $\sin(kL) = 0$ pour obtenir un nœud de pression (cf énoncé)

$v(L, t) = 2 \frac{p_{i0}}{Z_a} \cos(\omega t) \cos(kL)$ avec $|\cos(kL)| = 1$ puisque les fonctions sinus et cosinus sont en quadrature de phase. Cela traduit un ventre de vitesse.

Q.9) $\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ puisque k et L sont positifs non nuls.

Q.10) $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$; $f_n = \frac{c_a}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = n \frac{c_a}{2L}$

Q.11)



Q.12) A la précision des mesures près, on remarque qu'il se positionne 6 nœuds (un tous les 10 cm) donc 5 ventres $\Rightarrow n = 5$ d'où $f = f_5$. D'après **Q.10)** $c_m = \frac{2Lf_5}{5}$ soit $c_m \approx 40 \text{ m.s}^{-1}$.

Cette valeur de la célérité est très différente (1 à 2 ordres de grandeurs) de celles que l'on mesure dans l'eau ou dans l'air, pourtant les constituants majoritaires de la mousse. On ne peut donc se contenter d'assimiler a priori c_a et c_m d'une part, et c_m et $\frac{1}{\sqrt{\mu_e \chi_e}}$ d'autre part.

Q.13) On peut a priori assimiler la mousse à un milieu continu si $\lambda \gg R$.

Pour les ondes sonores audibles par l'homme $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$ donc $\lambda = \frac{c_m}{f} \in [2 \text{ mm}, 2 \text{ m}]$. La condition est donc vérifiée ($R \approx 20 \mu\text{m}$) sur tout le spectre audible.

Q.14) Considérons une masse m de mousse, occupant le volume V . Elle est constituée

- d'eau, de masse m_e de volume V_e

- d'air, de masse m_a de volume V_a

Par extensivité de la masse : $m = m_e + m_a = V_e \mu_e + V_a \mu_a = \phi V \mu_e + (1-\phi) V \mu_a \Rightarrow \mu_m = \phi \mu_e + (1-\phi) \mu_a$

$\phi \mu_e \approx 10^2 \text{ kg.m}^{-3}$ et $(1-\phi) \mu_a \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$

On simplifie donc : $\mu_m \approx \phi \mu_e$

Q.15) $\chi_m = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$;

Pour une transformation élémentaire isentropique : $dV = dV_e + dV_a$

où $dV_e = -V_e \chi_e dp = \phi V \chi_e dp$ et $dV_a = -V_a \chi_a dp = (1-\phi) V \chi_a dp$

$\Rightarrow \chi_m = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \phi \chi_e + (1-\phi) \chi_a$

Q.16) $\phi \chi_e \approx 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$; $(1-\phi) \chi_a \approx 10^{-6} \text{ Pa}^{-1} \Rightarrow \chi_m \approx (1-\phi) \chi_a$

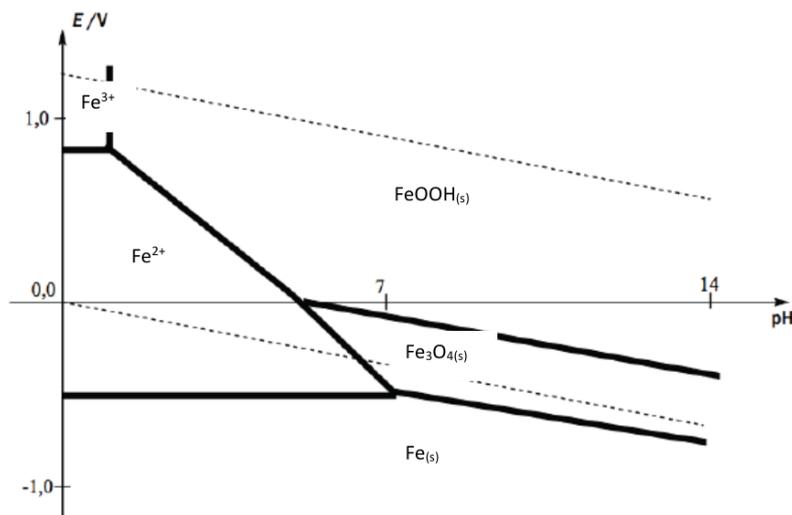
Q.17) $c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu_m \chi_m}} \approx \sqrt{\frac{\gamma P_0}{(1-\phi) \phi \mu_e}}$

Q.18) $c_m = 39 \text{ m.s}^{-1}$ valeur cohérente avec le résultat expérimental de Q12.

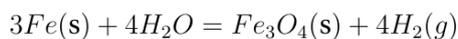
PARTIE III : corrosion d'un béton armé (Mines ponts PSI 2016)

3. Le nombre d'oxydation du fer est 0 dans $Fe(s)$, +III dans $FeOOH$ et 8/3 en moyenne dans $Fe_3O_4(s)$ (en réalité +II ou +III : 1 ion Fe^{2+} , 2 ions Fe^{3+} et 4 ions O^{2-})

4. On positionne les espèces par n.o. croissant de bas en haut; cations à pH faible et oxydes ou hydroxydes (bases conjuguées) à pH élevé :

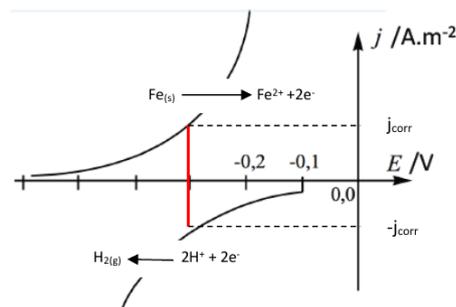


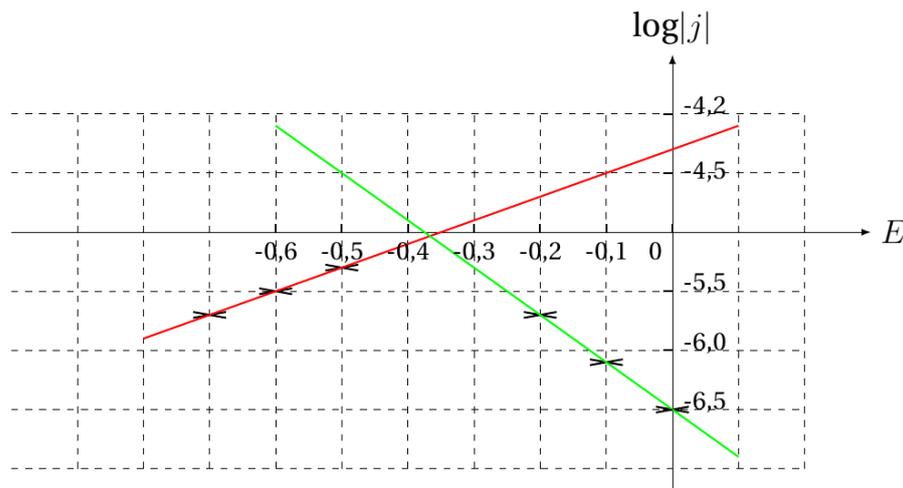
5. Le domaine de l'eau se situe entre les deux lignes pointillées; fer et eau ne peuvent donc coexister, quelque soit le pH; en milieu basique le fer est oxydé en $Fe_3O_4(s)$:



$Fe_3O_4(s)$ est stable en milieu aqueux désoxygéné comme le montre le diagramme ci-dessus.

6. Le diagramme $E(pH)$ montre bien que $E_H > E_{Fe}$ d'où les sens d'oxydation et de réduction; le potentiel de corrosion correspondant à $j_{ox} = -j_{red}$ est d'environ -0,3 V (trait rouge), ce que nous allons vérifier à la question suivante.





7.

- Courbe rouge : Pour des potentiels inférieurs ou égaux à $-0,5$ V, la densité de courant correspond à la seule branche anodique (cf. ci-dessus).
- Courbe verte : Pour des potentiels supérieurs ou égaux à $-0,2$ V, la densité de courant correspond à la seule branche cathodique (cf. ci-dessus).
- Si l'on trace $\log |j| = f(E)$, on obtient donc deux portions de droites de Tafel et l'intersection des deux fournit le potentiel de corrosion et le courant de corrosion. Ceci repose sur les mêmes arguments physiques que la détermination de la question précédente mais en plus précis.

On trouve $V_{cor} = -0,36$ V et $j_{cor} = 9.10^{-6}$ A.m⁻².

8. En dt , $d\xi$ mol de fer disparaissent et $2d\xi$ mol d'électrons circulent dans la pile de corrosion.

$$dQ = i_{corr} dt = 2d\xi N_A e = 2F d\xi \quad \text{et} \quad dm_{Fe} = M(Fe) d\xi$$

Enfin en considérant que le volume qui disparaît vaut $-Sde(t)$ (attention $de(t) < 0$) :

$$dm_{Fe} = -\rho_{Fe} S de(t) \quad \text{soit} \quad M(Fe) d\xi = -\rho_{Fe} S de(t)$$

En regroupant ces résultats et en tenant compte de $i_{corr} = j_{corr} S$, il vient : $\frac{de}{dt} = -\frac{M(Fe)j_{corr}}{2F\rho_{Fe}}$

9. AN : $e = 11 \mu\text{m}/\text{an}$.