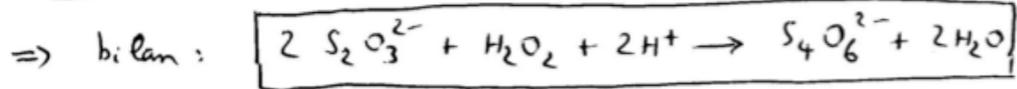
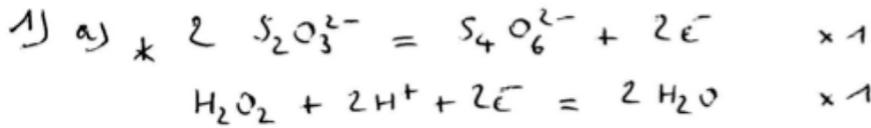


PARTIE CHIMIE : REACTEURS OUVERTS EN MARCHE ISOTHERME



* à 350 K on a $\frac{RT \ln 10}{F} = 0,07 \text{ V} :$

$\Rightarrow K^0 = 10^{(E^0_{H_2O_2} - E^0_{S_2O_3^{2-}}) \times \frac{2}{0,07}} = 10^{40}$

b) * $Q = \frac{V}{t} = 5 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$

* proportions stoechiométriques $\Rightarrow \left(\frac{dn_{H_2O_2}}{dt}\right)_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dn_{S_2O_3^{2-}}}{dt}\right)_E$

$\Rightarrow Q_A C_{A,0} = \frac{1}{2} Q_B C_{B,0} \Rightarrow Q_A = \frac{1}{2} Q_B \frac{C_{B,0}}{C_{A,0}} = Q_B$

* le débit volumique se conserve : $Q = Q_A + Q_B$

avec $Q_A = Q_B \Rightarrow Q = 2Q_A \Rightarrow Q_A = Q_B = 2,5 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$

* $\left(\frac{dn_{H_2O_2}}{dt}\right)_E = Q_A C_{A,0} = Q C_{A,E} \Rightarrow C_{A,E} = \frac{Q_A C_{A,0}}{Q}$

A.N : $C_{A,E} = 0,68 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

de même : $C_{B,E} = \frac{Q_B C_{B,0}}{Q} = 1,36 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

c) * Bilan de matière instantané pour H_2O_2 dans le réacteur ouvert RPAC en régime permanent ($A = H_2O_2$) :

$0 = \left(\frac{dn_{H_2O_2}}{dt}\right)_{RPAC} = \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_E + \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{\text{réaction}} + \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_S$

$\Rightarrow 0 = F_{A,E} - \nu V - F_{A,S} = Q C_{A,E} - \nu V - Q C_{A,S}$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{C_{A,E} - C_{A,S}}{V} Q = \frac{C_{A,E} - C_{A,S}}{\tau}}$$

* on $r = k C_A C_B = k C_A \cdot (2C_A) = 2k C_A^2 = 2k C_{A,S}^2$
 ↑ $C_B = 2C_A$ (proportions stoechiométriques)
 ↑ $C_A = C_{A,S}$ pour le RPAC

$$\Rightarrow 2k C_{A,S}^2 = \frac{C_{A,E} - C_{A,S}}{\tau}$$

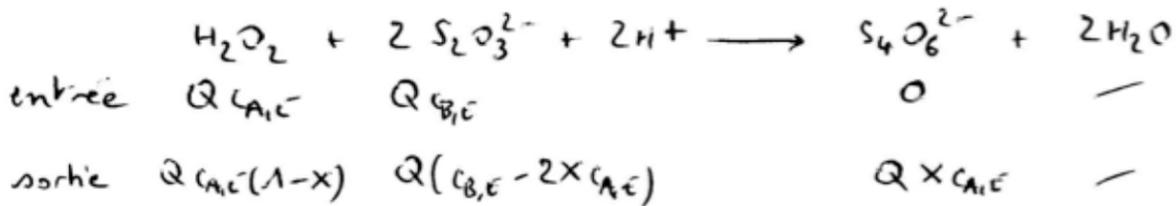
$$\Rightarrow \boxed{C_{A,S}^2 + \frac{C_{A,S}}{2k\tau} - \frac{C_{A,E}}{2k\tau} = 0}$$

résolution $\Rightarrow \boxed{C_{A,S} = 0,152 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$
 (concentration de H_2O_2 en sortie du RPAC)

* taux de conversion: $C_{A,S} = C_{A,E} (1-X)$

$$\Rightarrow \boxed{X = 1 - \frac{C_{A,S}}{C_{A,E}} = 0,78}$$

* concentration de $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ en sortie:



$$\Rightarrow \boxed{C_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}, S} = X C_{A,E} = 0,53 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

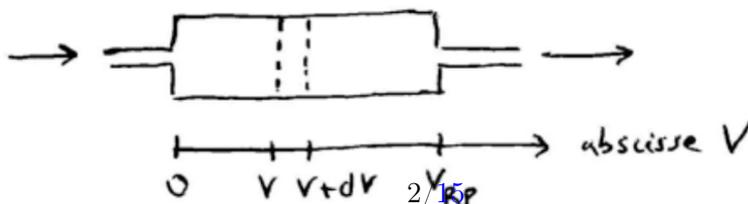
2) * $\frac{C_{B,E}}{2} \geq 10 C_{A,E} \Rightarrow \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ est en large excès

situation de dégénérescence d'ordre :

$$r = k [\text{S}_2\text{O}_3^{2-}] [\text{H}_2\text{O}_2] \approx k_{app} [\text{H}_2\text{O}_2]$$

avec $\boxed{k_{app} = k [\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]_E}$

*



bilan de matière instantané pour H_2O_2 (noté A),
réactif limitant, dans le méso-RPAC situé à
l'abscisse V :

$$\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{\text{més-RPAC}} = \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{\text{entrée à } V} + \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{\text{réaction}} + \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{\text{sortie à } V+dV}$$

régime permanent $\Rightarrow 0 = F_{A,V} - r_V dV - F_{A,V+dV}$

$$\Rightarrow \boxed{r_V = -\frac{dF_{A,V}}{dV} = -Q \frac{dc_{A,V}}{dV}}$$

* or $r_V = k_{app} c_{A,V} \Rightarrow k_{app} c_{A,V} = -Q \frac{dc_{A,V}}{dV}$

on intègre : $\int_{c_{A,E}}^{c_{A,S}} \frac{dc_{A,V}}{c_{A,V}} = \int_{V=0}^{V_{RP}} -\frac{k_{app} dV}{Q}$

$$\Rightarrow \ln \frac{c_{A,S}}{c_{A,E}} = -k_{app} \frac{V_{RP}}{Q} = -k_{app} \tau$$

$$\Rightarrow \ln(1-X) = -k_{app} \tau \Rightarrow \boxed{X = 1 - e^{-k_{app} \tau}}$$

A.N : $\left. \begin{array}{l} k_{app} = 2,3 \text{ s}^{-1} \\ \tau = V_{RP}/Q = 1,5 \text{ s} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{X = 0,968}$

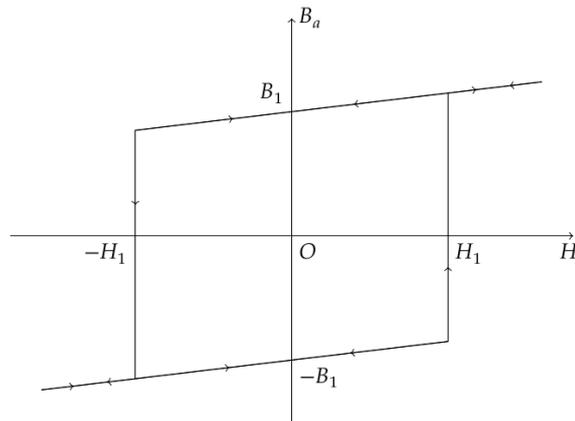
PARTIE PHYSIQUE : ETUDE D'UN HAUT-PARLEUR

I Calcul du champ magnétique dans l'entrefer

1. Le champ magnétique, l'excitation magnétique sont liés par $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$.

Les unités du système international sont : $\begin{cases} \vec{H} & \text{H/m} \\ \vec{M} & \text{H/m} \\ \vec{B} & \text{T} \end{cases}$

- 2. • Dans un matériau magnétique linéaire, l'aimantation est proportionnelle à l'excitation magnétique : $\vec{M} = \chi \vec{H}$ où χ est la susceptibilité magnétique du milieu.
- Or $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, donc dans un matériau linéaire : $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$. La perméabilité relative du milieu est $\mu_r = 1 + \chi$.
- La perméabilité est sans dimension.
- Le champ magnétique est une grandeur physique finie. Donc si $\mu_r \rightarrow +\infty, \vec{H} \rightarrow \vec{0}$.
L'excitation magnétique est nulle dans un milieu de perméabilité infinie.
- 3. • H_1 est l'excitation coercitive.
- M_1 est l'aimantation rémanente et l'aimantation à saturation.
- Le champ magnétique est $B_a = \mu_0 (H_a + M_a)$. L'allure du cycle est alors :

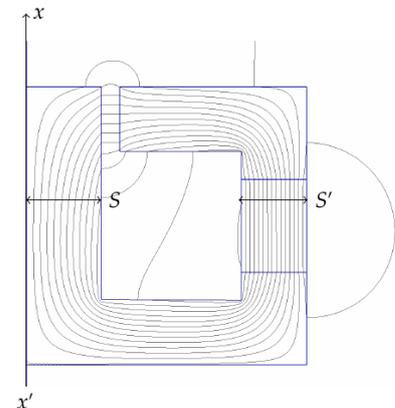


- Lorsque l'excitation magnétique est nulle, le champ magnétique prend la valeur $B_1 = \mu_0 M_1$.
 B_1 est le champ magnétique rémanent.
- Le milieu n'étant pas linéaire, on ne peut pas définir de perméabilité magnétique pour ce milieu.
- Lorsque $M_a = -M_1$, le champ magnétique est $B_a = \mu_0 (H_a - M_1)$ (1)
- 4. Le modèle proposé par l'énoncé n'est pas adapté et la carte de champ proposée fautive. Le champ magnétique tracé n'est pas à flux conservatif.
D'une part, il faut que l'air puisse s'écouler sous le cache-noyau. Le noyau magnétique doit être évidé pour cela.

Si on considère un système invariant par translation, une simulation numérique donne une carte de champ comparable à celle de l'énoncé.

Dans un dispositif invariant par translation, les sections S et S' sont à peu près identiques, le champ magnétique a une norme comparable sur les deux sections. La carte est bien celle d'un champ à flux conservatif.

Dans un dispositif à symétrie de révolution d'axe (Ox) , $S' \gg S$. La carte proposée n'est pas celle d'un champ à flux conservatif.



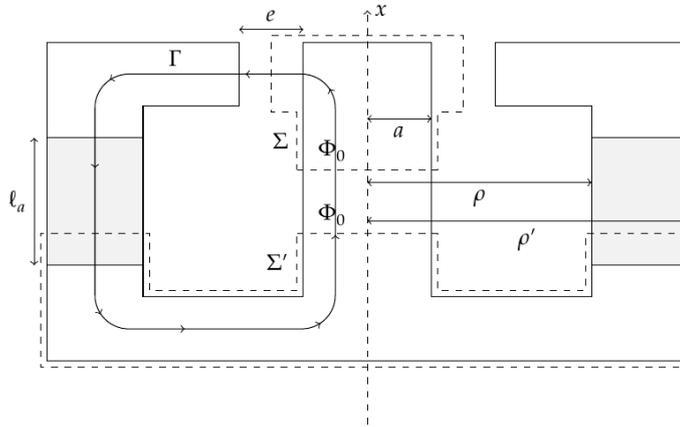
Les lignes de champ sont perpendiculaire à la surface du matériau ferromagnétique lorsqu'elles sortent de celui-ci.

Les conditions aux limites pour les champs sont :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{La composante normale du champ magnétique est continue à l'interface} \\ \text{La composante tangentielle de l'excitation magnétique est continue à l'interface.} \end{array} \right.$

5. L'énoncé demande de justifier la conservation du flux du champ magnétique à partir d'une carte de champ qui ne respecte pas cette propriété.

On considère les tubes de champ Σ et Σ' représentés ci-dessous :



La conservation du flux s'écrit alors : $\begin{cases} \Phi_0 = 2\pi a \ell_e B_e \\ \Phi_0 = \pi(\rho'^2 - \rho^2) B_a \end{cases}$ et $2a\ell_e B_e = (\rho'^2 - \rho^2) B_a$ (2)

6. Le théorème d'Ampère sur le contour Γ s'écrit $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$. En tenant compte du fait que l'excitation magnétique est négligeable dans l'acier : $\ell_a H_a + e H_e = 0$ (3)

7. On considère le système :

$$\begin{cases} B_a = \mu_0(H_a - M_1) \\ 2a\ell_e B_e = (\rho'^2 - \rho^2) B_a \\ \ell_a H_a + e H_e = 0 \\ B_e = \mu_0 H_e \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B_a - \mu_0 H_a = -\mu_0 M_1 \\ \frac{2a\ell_e}{e} \frac{B_e}{H_e} = -\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\ell_a} \frac{B_a}{H_a} \\ B_e = \mu_0 H_e \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B_a - \mu_0 H_a = -\mu_0 M_1 \\ \frac{2a\ell_e}{e} \mu_0 H_a = -\frac{\rho'^2 - \rho^2}{\ell_a} B_a \end{cases}$$

Donc $B_a \left(1 + \frac{e(\rho'^2 - \rho^2)}{2a\ell_a \ell_e} \right) = \mu_0 M_1$

Le champ magnétique dans l'aimant est $B_a = \frac{\mu_0 M_1}{1 + \frac{e(\rho'^2 - \rho^2)}{2a\ell_a \ell_e}}$ Soit $B_a = 0,19 \text{ T}$

8. La champ magnétique dans l'entrefer est donné par $B_e = \frac{\rho'^2 - \rho^2}{2a\ell_e} B_a$. Donc $B_e = \frac{\mu_0 M_1}{\frac{e}{\ell_a} + \frac{2a\ell_e}{\rho'^2 - \rho^2}}$ Soit $B_e = 2,1 \text{ T}$

9. L'excitation magnétique dans l'aimant est $H_a = -\frac{e}{\ell_a} H_e$.

Donc $H_a = -\frac{e}{\ell_a} \frac{M_1}{\frac{e}{\ell_a} + \frac{2a\ell_e}{\rho'^2 - \rho^2}}$ et $H_a = -\frac{M_1}{1 + \frac{2a\ell_e \ell_a}{e(\rho'^2 - \rho^2)}}$

Le fonctionnement est nominal si $|H_a| < H_1$ donc $\frac{M_1}{1 + \frac{2a\ell_e \ell_a}{e(\rho'^2 - \rho^2)}} < H_1$

10. Si un courant électrique circule dans la bobine, le théorème d'AMPÈRE s'écrit $\ell_a H_a + e H_e = Ni$.

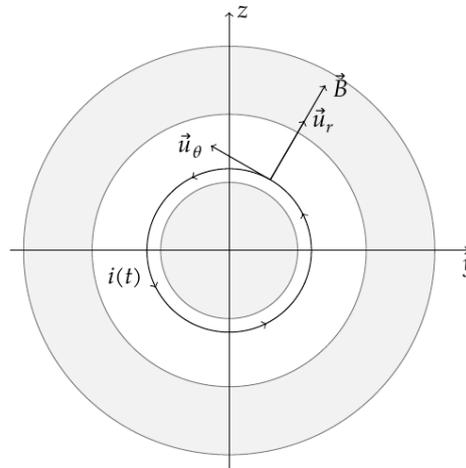
Avec les valeurs précédentes : $\begin{cases} Ni \approx 50 \text{ A} \\ e H_e = e \frac{B_e}{\mu_0} \approx 5,0 \text{ kA} \end{cases}$

L'influence du courant électrique dans la bobine est faible devant celui de l'aimant permanent.

Le champ magnétique dans l'entrefer n'est pas modifié sensiblement par le courant électrique.

II Équations électriques et mécaniques dans le cadre d'un modèle linéaire

11. La force de LAPLACE s'exerçant sur un circuit C filiforme est $\vec{F}_L = i(t) \int_C d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.



Pour le système étudié : $\begin{cases} d\vec{\ell} = dl\vec{u}_\theta \\ \vec{B} = B_e\vec{u}_r \end{cases}$.

La force de LAPLACE est donc : $\vec{F}_L = i(t) \int_C dl B_e \vec{u}_x$.

En notant $\ell = \int_C dl$ la longueur totale du fil : $\vec{F}_L = -\ell B_e i(t) \vec{u}_x$.

12. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'équipage mobile s'écrit : $m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x = \vec{F}_r + \vec{F}_f + \vec{F}_L$

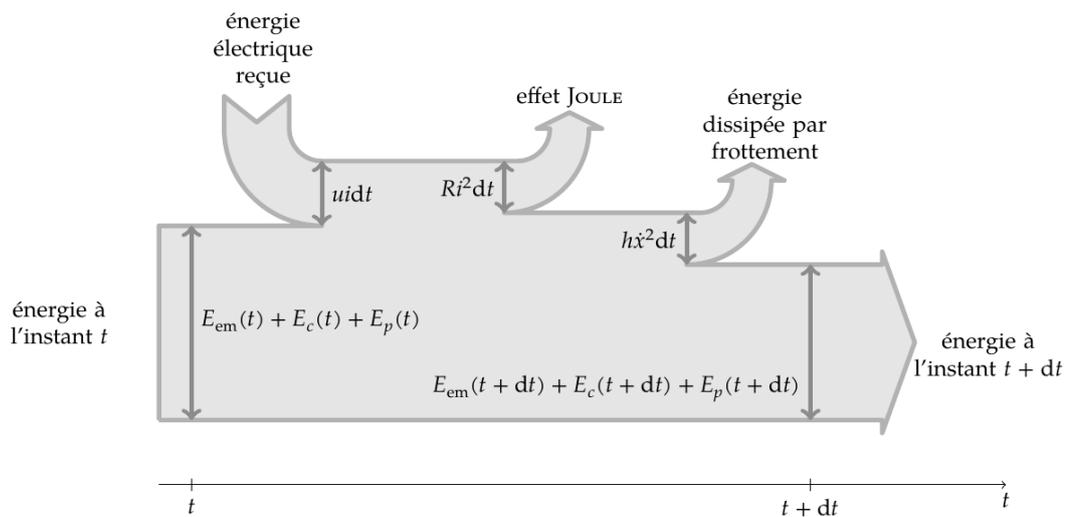
Donc, en projetant cette équation sur \vec{u}_x : $m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx(t) - h \frac{dx}{dt} - \ell B_e i(t)$

Donc $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x(t) = -\frac{\ell B_e}{m} i(t)$ (4)

- 13. • La bobine est en mouvement dans champ magnétique permanent dans l'entrefer ;
- la bobine est aussi siège d'un phénomène d'auto-induction ;

Une force électromotrice est induite dans la bobine.

14. On réalise un bilan d'énergie pour le haut-parleur entre les instants t et $t + dt$:



- $u(t)i(t)dt$ énergie électrique reçue par le haut-parleur
- $Ri^2(t)dt$ énergie dissipée par effet JOULE
- $h\dot{x}^2 dt$ énergie dissipée par frottement
- dE_c variation d'énergie cinétique de l'équipage mobile
- dE_{em} variation de l'énergie magnétique
- dE_p variation de l'énergie potentielle élastique

Le bilan d'énergie s'écrit :

$$dE_{em} + dE_c + dE_p = u(t)i(t)dt - Ri^2(t)dt - h\dot{x}^2(t)dt$$

Or $u(t) = Ri(t) - e(t)$, donc $-e(t)i(t)dt = dE_{em} + dE_c + dE_p + h\dot{x}^2(t)dt$

On multiplie alors l'équation mécanique par la vitesse :

$$m\dot{x}\ddot{x} + h\dot{x}^2 + K\dot{x}x = F_L\dot{x}$$

D'où :

$$d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + h\dot{x}^2 dt + d\left(\frac{1}{2}Kx^2\right) = F_L\dot{x}dt$$

- Avec $\begin{cases} E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 & \text{énergie cinétique} \\ E_p = \frac{1}{2}Kx^2 & \text{énergie potentielle élastique} \\ \delta W_L = F_L\dot{x}dt & \text{travail de la force de LAPLACE} \end{cases}$

Donc $dE_c + dE_p + h\dot{x}^2 dt = \delta W_L$

En comparant les deux bilans d'énergie : $-e(t)i(t)dt = dE_{em} + \delta W_L$

En notant $\delta W_{em} = -e(t)i(t)dt$ le travail de la force contre-électromotrice : $\delta W_{em} = \delta W_L + dE_{em}$ (5)

15. L'énergie magnétique est $E_{em} = \frac{1}{2}Li^2 + E_{em0}$, donc $dE_{em} = Lid i$.

Le travail de la force de LAPLACE est $\delta W_L = -\ell B_e i \dot{x} dt$

Donc $-e(t)i(t)dt = -\ell B_e i(t) \frac{dx}{dt} dt + Li(t) di$

Donc $e(t) = \ell B_e \frac{dx}{dt} - L \frac{di}{dt}$

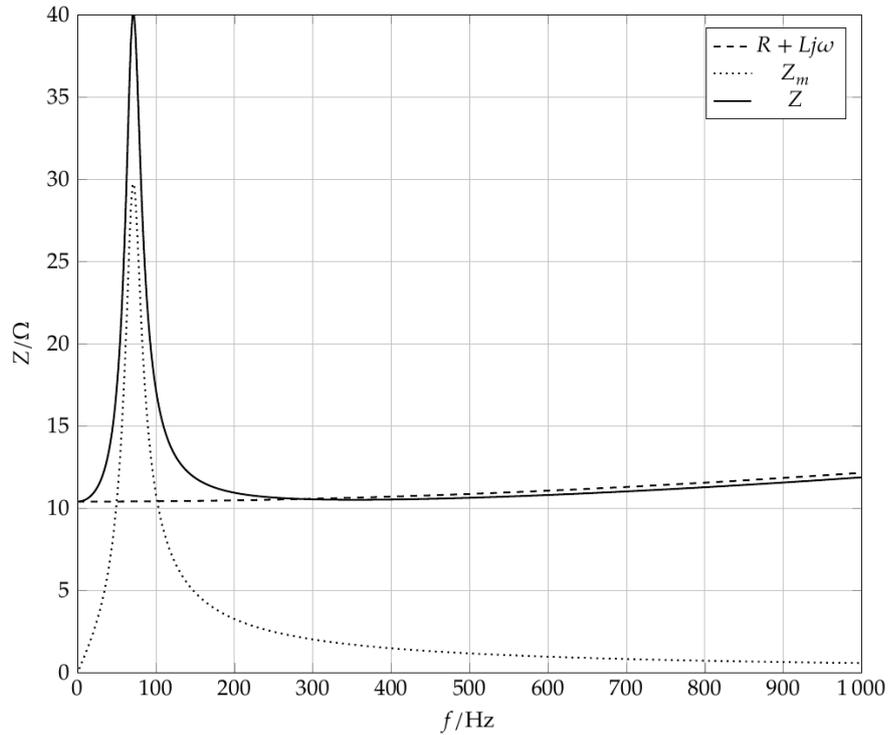
Avec $u(t) = Ri(t) - e(t)$: $u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} - \ell B_e \frac{dx}{dt}$ (6)

En notation complexe, les équations deviennent : $\begin{cases} \left[\left(-\omega^2 + \frac{K}{m} \right) + j\omega \frac{h}{m} \right] \underline{x} = -\frac{\ell B_e}{M} \underline{i} \\ \underline{u} = (R + Lj\omega) \underline{i} - \ell B_e j\omega \underline{x} \end{cases}$

16. L'impédance du circuit est : $\underline{Z}(j\omega) = R + Lj\omega + \frac{1}{C_m j\omega + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{L_m j\omega}}$

Donc $\underline{Z}(j\omega) = R + Lj\omega + \frac{R_m}{1 + jR_m \left(C_m \omega - \frac{1}{L_m \omega} \right)}$

On pose $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \\ Q = R_m \sqrt{\frac{C_m}{L_m}} \end{cases}$, alors : $\underline{Z}(j\omega) = R + Lj\omega + \frac{R_m}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$. Avec $\begin{cases} \omega_0 = 447 \text{ rad/s} \\ f_0 = 71 \text{ Hz} \\ Q = 3,7 \\ R_m = 30 \Omega \end{cases}$



L'impédance Z_m a une structure de filtre passe-bande de fréquence centrale f_0 et de facteur de qualité Q . $|Z_m|(f)$ admet donc un maximum en f_0 .

Comme le montre le graphique des impédances, $|R + Lj\omega|$ varie peu dans la plage de fréquence $[0 \text{ Hz}; 1000 \text{ Hz}]$. L'impédance $|Z|$ admet donc un maximum pour une fréquence proche de f_0 .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{Donc } f_0 = 71 \text{ Hz}$$

III Influence du rayonnement du haut-parleur

III.A Champ rayonné par une sphère pulsante

17. On note :

$\rho(M, t) = \rho_0 + \rho_1(M, t)$	masse volumique de l'air
$P(M, t) = P_0 + p(M, t)$	pression de l'air
P_0	pression atmosphérique
$p(M, t)$	surpression acoustique
$\vec{v}(M, t)$	vitesse de l'air
c	vitesse des ondes sonores

L'approximation acoustique est :

$$\begin{cases} |\rho_1(M, t)| \ll \rho_0 \\ |p(M, t)| \ll P_0 \\ \|\vec{v}(M, t)\| \ll c \end{cases}$$

Les équations du milieu sont :

$$\begin{cases} \rho(M, t) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P(M, t) & \text{équation du mouvement} \\ \text{div}(\rho(M, t) \vec{v}(M, t)) + \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} = 0 & \text{conservation de la masse} \\ \chi_s = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial P} \right)_s & \text{coefficient de compressibilité isentropique} \end{cases}$$

Au premier ordre dans l'approximation acoustique :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t) \\ \rho_0 \text{div} \vec{v}(M, t) + \frac{d\rho_1}{dt} = 0 \\ \rho_0 \chi_s p(M, t) = \rho_1(M, t) \end{cases}$$

En éliminant ρ_1 :
$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t) \\ \text{div} \vec{v}(M, t) + \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

En prenant la divergence de la première équation :
$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \text{div} \vec{v}}{\partial t}(M, t) = -\Delta p(M, t) \\ \text{div} \vec{v}(M, t) + \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

En éliminant la vitesse : $\rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(M, t) = \Delta p(M, t)$.

$$\Delta p(M, t) - A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } A = \rho_0 \chi_S$$

La vitesse des ondes sonores est $c = \frac{1}{\sqrt{A}}$:
$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

18. Pour un gaz parfait : $P_0 V = nRT$. Donc, en notant M la masse molaire du gaz : $MP_0 = \frac{m}{V}RT$.

Donc $MP_0 = \rho_0 RT$. Donc
$$\rho_0 = \frac{MP_0}{RT}$$

Pour un gaz parfait dont le coefficient γ est constant et en évolution adiabatique réversible, la loi de LAPLACE s'écrit : $PV^\gamma = C$.

Donc $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$ et $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{1}{\gamma P_0}$.

Donc $\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$

La vitesse des ondes sonores est donc
$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$
. Donc
$$c = 347 \text{ m/s}$$

19. On considère le champ de pression :
$$\underline{p}(r, t) = \frac{A_1}{r} e^{j[\omega t - k(r - R_0)]}$$

Donc $\Delta \underline{p}(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \underline{p}(r, t))$

L'équation de d'ALEMBERT est alors :
$$\frac{A_1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (e^{j[\omega t - k(r - R_0)]}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{A_1}{r} e^{j[\omega t - k(r - R_0)]} \right)$$

Donc $-\frac{k^2}{r} = -\frac{\omega^2}{c^2 r}$.

La relation de dispersion est
$$k = \frac{\omega}{c}$$

20. L'équation d'EULER linéarisée est : $\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$.

Donc en notation complexe : $\rho_0 j \omega \underline{v}(r, t) = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{A_1}{r} e^{j[\omega t - k(r - R_0)]} \right]$

Donc $\rho_0 j \omega \underline{v}(r, t) = \underline{A_1} e^{j[\omega t - k(r - R_0)]} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right)$

Le champ de vitesse est donc
$$\underline{v}(r, t) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{j\omega r} \right) \underline{p}(r, t)$$

L'impédance acoustique est alors
$$\underline{Z}_a = \frac{1}{\rho_0 c} \left(1 + \frac{c}{j\omega r} \right)$$

À grande distance de la source $\underline{Z}_a \approx \frac{1}{\rho_0 c}$. On retrouve l'expression de l'impédance acoustique des ondes planes progressives.

21. Le composante radiale de la vitesse en R_0 est :
$$v(R_0, t) = V_a(t) = \frac{Q_0}{4\pi R_0^2} \cos(\omega t)$$

Donc, en représentation complexe : $\underline{v}(R_0, t) = \frac{Q_0}{4\pi R_0^2} e^{j\omega t}$

D'après la question précédente, $\underline{v}(R_0, t) = \frac{A_1}{R_0 \rho_0} \left(\frac{k}{\omega} + \frac{1}{j\omega R_0} \right) e^{j\omega t}$

D'où $\underline{A}_1 = \frac{Q_0}{4\pi R_0} \frac{\rho_0}{k + \frac{1}{jR_0}}$

Et la surpression est : $\underline{p}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi R_0} \frac{\rho_0}{k + \frac{1}{jR_0}} \frac{e^{j[\omega t - k(r - R_0)]}}{r}$

Si $kR_0 \ll 1$, alors la surpression devient : $\underline{p}(r, t) = j\omega \rho_0 \frac{Q_0}{4\pi kr} e^{j(\omega t - kr)}$

22. Pour un monopôle, le champ de vitesse est $\underline{v}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{j(\omega t - kr)}$

On considère le potentiel complexe $\underline{\Phi}(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)}$.

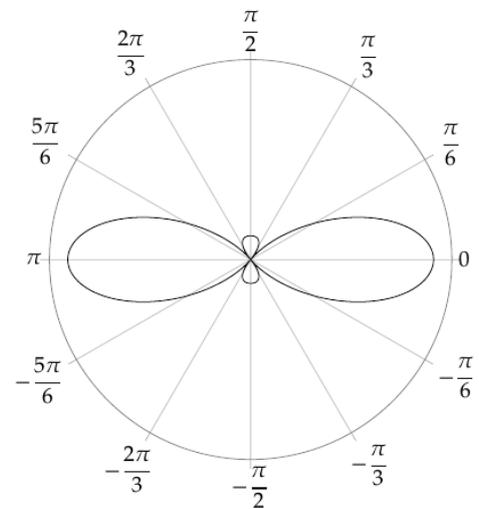
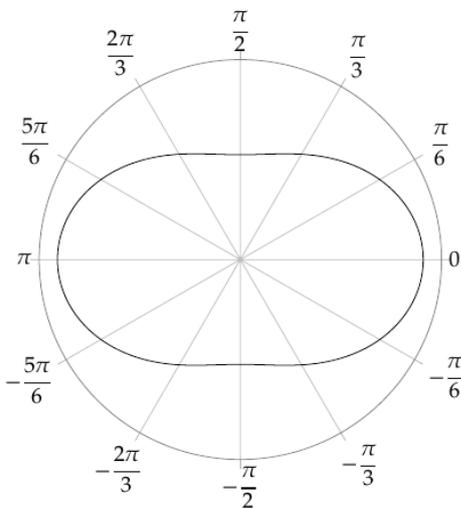
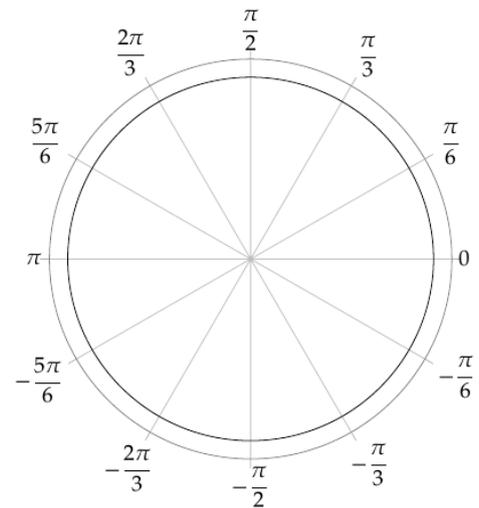
Alors : $\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial r} = -\frac{Q_0}{4\pi r^2} (1 + jkr) e^{j(\omega t - kr)}$

On a bien : $\underline{\vec{V}} = -\overrightarrow{\text{grad}} \underline{\Phi}(r, t)$

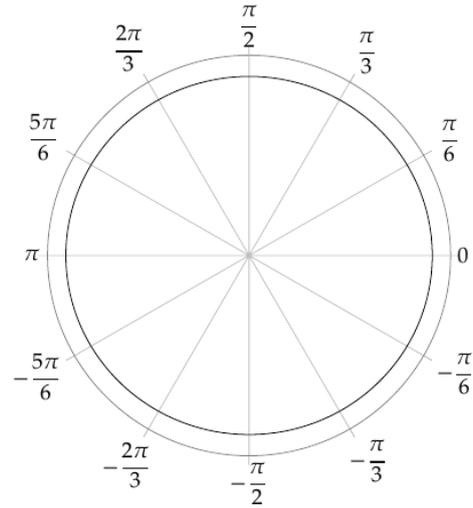
III.B Champ rayonné par un disque encastré dans un plan

23. Dans le cas d'un monopôle, $kR_d \rightarrow 0$. Dans ce cas $D(\theta) = 1$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. La figure ci-contre montre $|D(\theta)|$ en coordonnées polaires. Dans ce cas, le rayonnement est isotrope. La source n'est pas directive.

Les deux figures ci-dessous ont été tracées pour $kR_d = 2$ et $kR_d = 5$. Dans ces cas, l'amplitude de l'onde varie avec la direction : elle est maximale pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Il peut même exister des directions dans lesquelles l'amplitude de l'onde est nulle. Les sources sont alors directives.



24. Dans le cas étudié, $kR_d = 0,36$, la variable u varie donc entre 0 et 0,36. On constate en utilisant la courbe donnant $D(u)$ que les variations d'amplitude sont très faibles. La figure ci-contre représente $|D(\theta)|$ dans le cas étudié. La source est très peu directive.



25. La force exercée sur le disque est : $E_{ra} = -\rho_0 c S_d \left[\frac{1}{2} (kR_d)^2 + j \frac{8kR_d}{3\pi} \right] j\omega \underline{x}$

En utilisant la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$: $E_{ra} = -\rho_0 c S_d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega R_d}{c} \right)^2 + j \frac{8\omega R_d}{3\pi c} \right] j\omega \underline{x}$

Cette force peut alors être écrite : $E_{ra} = -(h_{ra}(\omega)j\omega \underline{x} + m_{ra}(j\omega)\underline{x})$ avec $\begin{cases} h_{ra}(\omega) = \frac{\rho_0 S_d (\omega R_d)^2}{2c} \\ m_{ra} = \frac{8\rho_0 S_d R_d}{3\pi} \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} h_{ra}(\omega) = \frac{\rho_0 \pi \omega^2 R_d^4}{2c} \\ m_{ra} = \frac{8\pi \rho_0 R_d^3}{3} \end{cases}$

En reprenant l'équation du mouvement : $[m(j\omega)^2 + hj\omega + k] \underline{x} = E_L + E_{ra}$.

Donc $[(m + m_{ra})(j\omega)^2 + (h + h_{ra}(\omega))j\omega + k] \underline{x} = E_L$

Tout se passe comme si la masse de l'équipage mobile passe de m à $m + m_{ra}$ et que le coefficient de frottement passe de h à $h + h_{ra}(\omega)$.

La correspondance n'existe pas en notation réelle. La force de frottement est de la forme $h \frac{dx}{dt}$, la force supplémentaire due au rayonnement est de la forme $h' \frac{d^3x}{dt^3}$.

Les valeurs numériques sont $\begin{cases} m_{ra} = 10 \text{ g} \\ h_{ra} = 0,86 \text{ Nsm}^{-1} \end{cases}$, qu'il faut comparer à $\begin{cases} m = 58 \text{ g} \\ h = 7 \text{ Nsm}^{-1} \end{cases}$.

La force exercée par l'air sur la membrane n'est pas négligeable dans l'équation du mouvement de la membrane.

III.C Puissance rayonnée par un haut-parleur en enceinte close

26. Le volume de l'enceinte est $V(x) = V_0 + S_d x$

L'air à l'intérieur de l'enceinte est en évolution adiabatique réversible. Si on assimile cet air à un gaz parfait dont le coefficient γ est constant, on peut utiliser la loi de LAPLACE : $(p_0 + p_i(x)) V^\gamma(x) = p_0 V_0^\gamma$

La différentielle logarithmique donne : $\frac{p_i(x)}{p_0} + \gamma \frac{V(x) - V_0}{V_0} = 0$.

Donc $\frac{p_i(x)}{p_0} + \frac{\gamma S_d x}{V_0}$

Donc $p_i(x) = -\frac{\gamma p_0 S_d}{V_0} x$

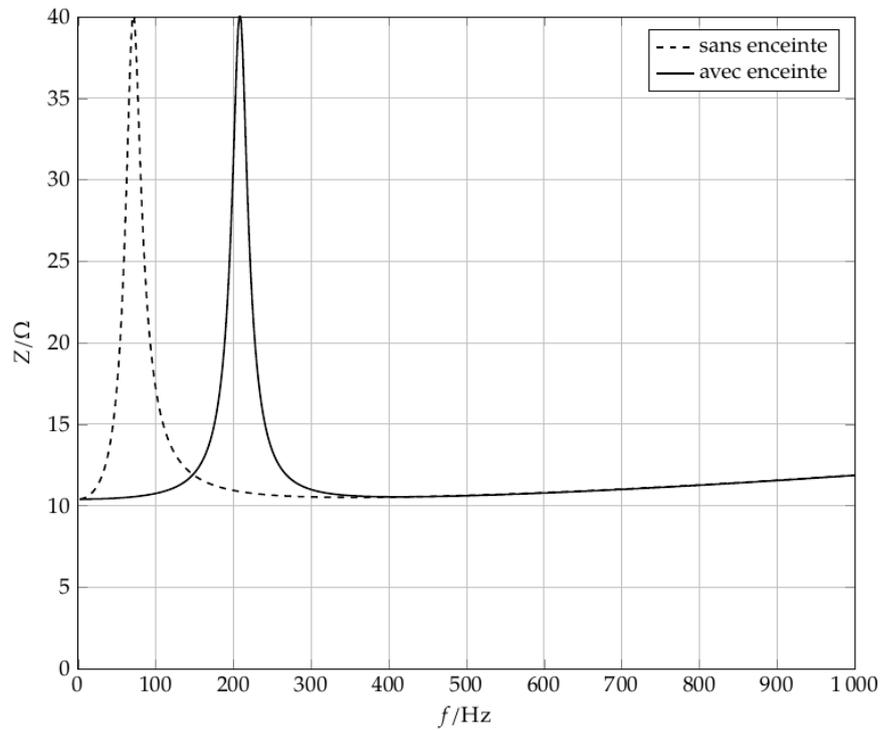
La force exercée sur la membrane est : $E_i = S_d p_i(x)$.

Donc $E_i = -\frac{\gamma p_0 S_d^2}{V_0} x$

27. La force précédente est proportionnelle au déplacement de la membrane. Elle est donc analogue à une force élastique exercée par un ressort de raideur $K_i = \frac{\gamma p_0 S_d^2}{V_0}$

En reprenant l'équation du mouvement : $[m(j\omega)^2 + hj\omega + k] \underline{x} = \underline{E}_L + \underline{E}_{ra} + \underline{E}_i$.
Donc : $[m(j\omega)^2 + hj\omega + (k + K_i)] \underline{x} = \underline{E}_L + \underline{E}_{ra}$.

$$K_i = 8,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$



En remplaçant la raideur K par $K + K_i$, L_m devient $L'_m = \frac{B_e^2 \ell^2}{K + K_i}$ et la fréquence de résonance f_0 devient $f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'_m C_m}}$.

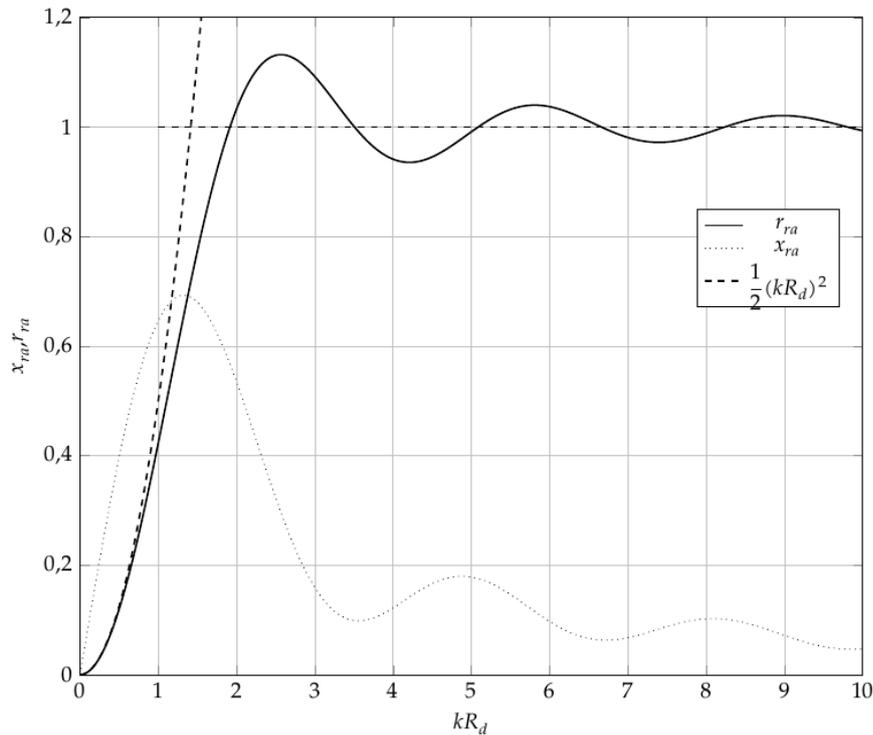
$$f_1 = 209 \text{ Hz}$$

La fréquence de résonance est donc plus grande en présence de l'enceinte.

28. En utilisant la question 25, en basse fréquence, $r_{ra} \approx \frac{1}{2}(kR_d)^2$. Donc $r_{ra} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R_d}{c} \right)^2$.

En utilisant la figure donnée, en haute fréquence, $r_{ra} \approx 1$.

La figure ci-dessous représente r_{ra} ainsi que les deux expressions approchées.



La pulsation pour laquelle les deux fonctions approchées se croisent est $\omega = \frac{c}{R_d} \sqrt{2}$

Donc $f_2 = \frac{c}{\sqrt{2}\pi R_d}$. Soit $f_2 = 781 \text{ Hz}$

29. L'impédance de la bobine $\underline{Z} = R + Lj\omega$ est proche de la résistance R si $R \gg 2\pi fL$.

Donc $f \ll \frac{R}{2\pi L}$. Soit $f \ll 1,66 \text{ kHz}$

30. Les équations électrique et mécanique sont :

$$\begin{cases} \underline{u} = R\underline{i} - \ell B_e j\omega \underline{x} \\ \left[\left(\frac{K_1}{m} - \omega^2 \right) + j\omega \frac{h}{m} \right] \underline{x} = -\frac{\ell B_e}{m} \underline{i} \end{cases}$$

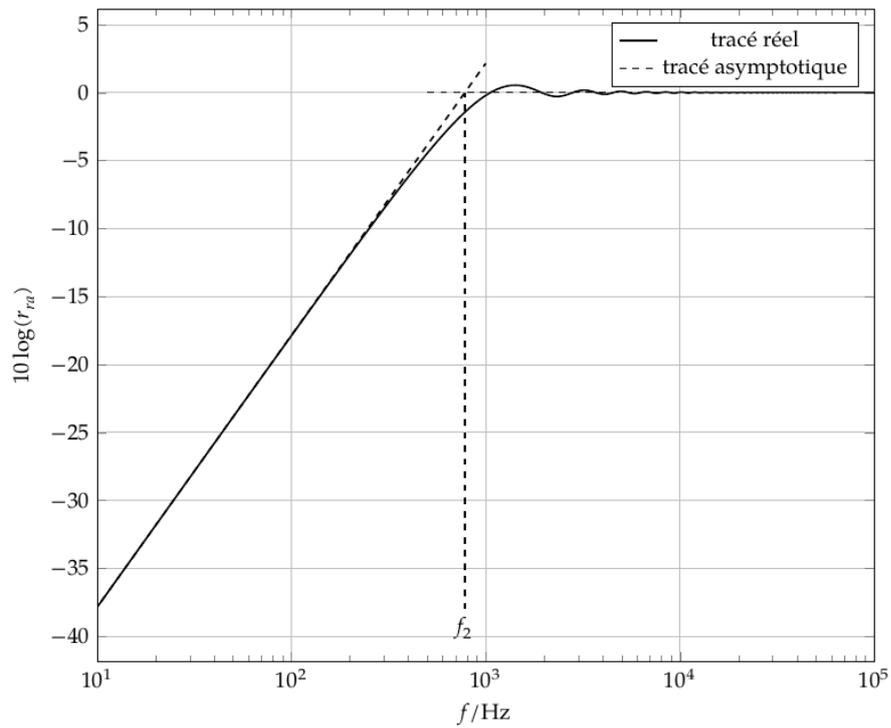
En éliminant l'intensité : $\underline{u} = -\frac{Rm}{\ell B_e} \left[\left(\frac{K_1}{m} - \omega^2 \right) + j\omega \frac{h}{m} \right] \underline{x} - \ell B_e j\omega \underline{x}$

Donc $\underline{x} = -\frac{\frac{\ell B_e}{Rm}}{\frac{K_1}{m} - \omega^2 + j\omega \left(\frac{h}{m} + \frac{\ell^2 B_e^2}{Rm} \right)} \underline{u}$

Or la vitesse est donnée par $\underline{v} = j\omega \underline{x}$.

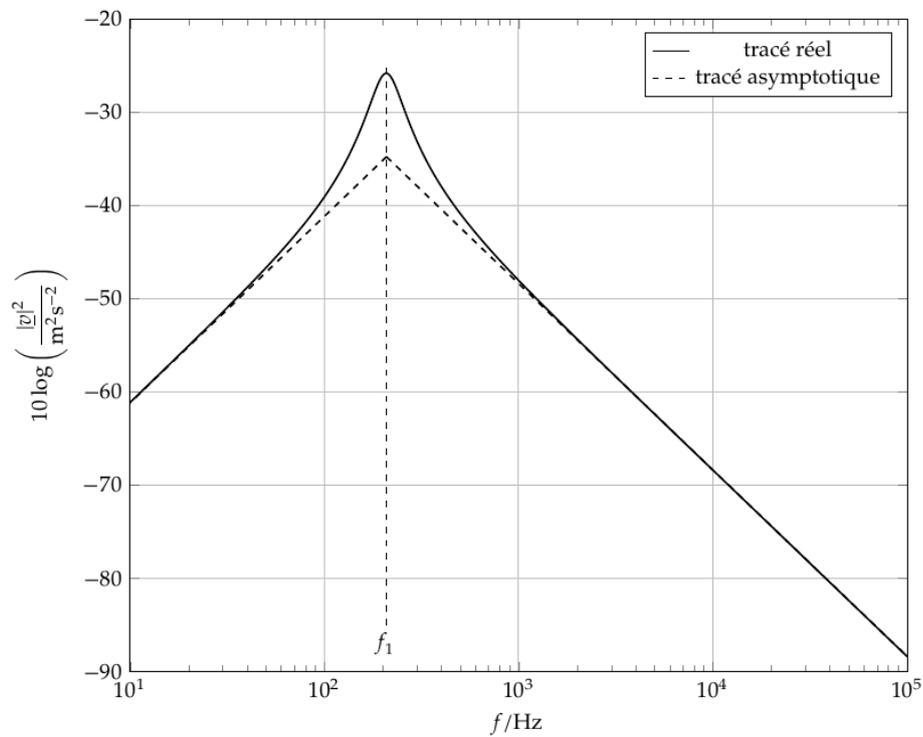
Donc $\underline{v} = -\frac{\frac{\ell B_e}{Rm} j\omega}{\frac{K_1}{m} - \omega^2 + j\omega \left(\frac{h}{m} + \frac{\ell^2 B_e^2}{Rm} \right)} \underline{u}$

31. Le graphique représentant $10 \log |r_{ra}|$ en fonction de $\log \frac{f}{\text{Hz}}$ est donné ci-dessous.



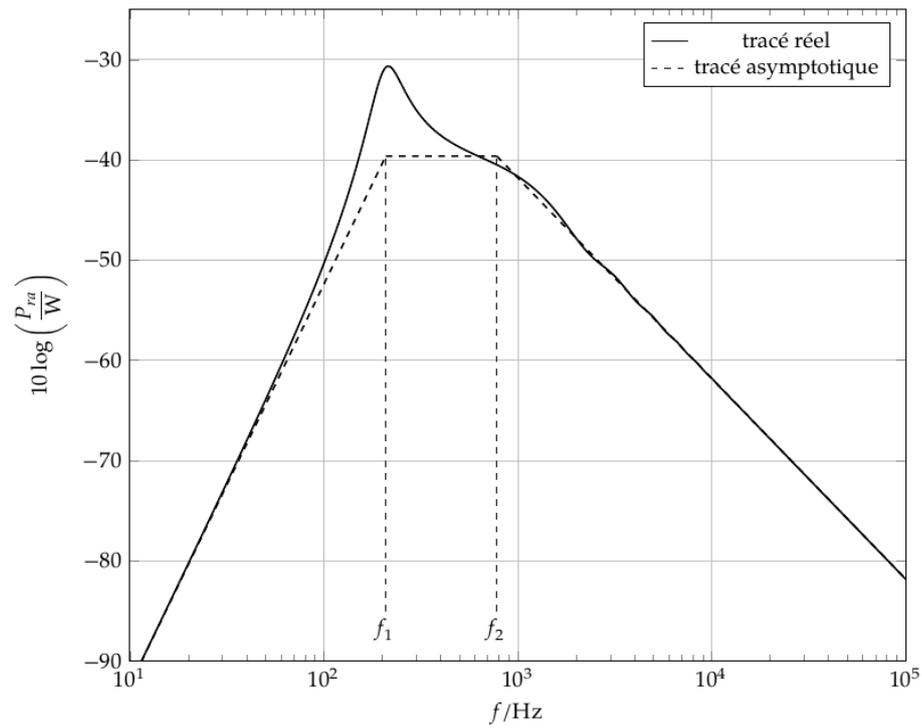
Les pentes des asymptotes sont : $\begin{cases} 20 \text{ dB} & \text{si } f < f_2 \\ 0 \text{ dB} & \text{si } f > f_2 \end{cases}$.

Si on considère la réponse donnée à la question précédente, la fonction de transfert $\frac{v}{u}$ est celle d'un filtre passe-bande du second ordre. La pulsation maximale est $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}$ et la fréquence correspondante est $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{m}}$



Les pentes des asymptotes sont : $\begin{cases} 20 \text{ dB} & \text{si } f < f_1 \\ -20 \text{ dB} & \text{si } f > f_1 \end{cases}$.

32. La puissance rayonnée peut s'obtenir en faisant le produit des deux fonctions précédentes : $P_{ra} = \frac{1}{2} \rho_0 C S_d r_{ra} |\underline{v}|^2$



Les pentes des asymptotes sont :

40 dB	si $f < f_1$
0 dB	si $f_1 < f < f_2$
-20 dB	si $f > f_2$

Comme on le voit sur le diagramme réel, la puissance rayonnée n'est jamais indépendante de la fréquence. Toutefois, si on se contente du tracé asymptotique, la bande passante du haut-parleur est $[f_1; f_2]$ soit [200 Hz; 800 Hz].