

## Transparence électromagnétique induite dans un plasma froid magnétisé

### 1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma froid magnétisé

#### 1.1 Hypothèses du modèle

1. La masse des ions argon est environ  $10^5$  fois plus grande que celle des électrons. Or les forces subies par les ions et les électrons sont du même ordre de grandeur. Donc, d'après la loi de la quantité de mouvement, on peut négliger *a priori* le mouvement des ions devant celui des électrons.

2. L'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux électrons est :  $\mathcal{E}_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , l'énergie cinétique d'agitation thermique est :  $\mathcal{E}_c = \frac{3}{2}k_B T$ . La longueur de LANDAU vérifie donc :

$$r_L = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2}{3k_B T}.$$

Numériquement :

$$r_L \approx (2 \times 10^{-28}) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{10^{-23} \times 10^4} \approx \frac{4}{3} \times 10^{-9} \text{ m},$$

soit :  $r_L \approx 1 \text{ nm}$ .

3. On estime la distance moyenne entre deux charges à :  $l \approx n_0^{-1/3}$ , soit :  $l \approx 10^{-16/3} = 10^{-1/3} \times 10^{-5} = 0,5 \times 10^{-5} \text{ m}$ , ou encore :  $l \approx 5 \mu\text{m}$ .

$r_L \ll l$  donc l'énergie d'interaction électrostatique entre deux électrons est négligeable l'énergie cinétique des électrons, les électrons ne sont quasiment pas déviés par le champ électrique des autres particules et on peut alors négliger l'effet des collisions entre particules chargées.

*Il ne me semble pas évident que pour les candidats les collisions dont parle le texte soit bien les interactions électrostatiques.*

4. La vitesse quadratique moyenne est :  $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \approx \sqrt{\frac{3 \times 10^{23} \times 10^4}{9 \times 10^{-31}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^6 \approx 6 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ .

La rapport  $\frac{u}{c}$  est de l'ordre de  $2 \times 10^{-3}$  : l'hypothèse non relativiste est parfaitement justifiée.

5. La longueur d'onde de DE BROGLIE des électrons est :  $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{mu} \approx \frac{7 \times 10^{-34}}{(9 \times 10^{-31})(6 \times 10^5)} \approx \frac{1}{54} \times 10^{-8} \approx 0,2 \text{ nm}$ . Elle est très inférieure à  $l$  : le cadre classique convient.

6. La célérité du son dans le plasma (*et non dans le gaz d'électrons comme le suggère le texte*) est :

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M}} \approx \sqrt{\frac{10^{-23} \times 10^4}{7 \times 10^{-26}}} \approx 10^3 \text{ m.s}^{-1}.$$

$\frac{c_s}{u} \approx 2 \times 10^{-3}$  donc  $c_s \ll u \ll v_\phi$  : il est légitime de négliger les ondes acoustiques au sein du plasma.

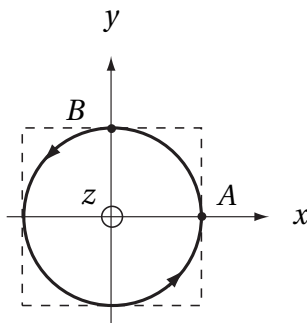
## 1.2 Réponse d'un plasma froid magnétisé à une onde électromagnétique

7. L'équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  donne :

$$\vec{B} = -\frac{1}{i\omega} \text{rot } \vec{E} = \Re \left\{ \frac{kE_0}{\omega} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] \right\}.$$

8. En notations réelles :  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$ . L'onde est polarisée circulairement.

On représente l'évolution de l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  dans un plan d'onde, en regardant l'onde arriver vers nous :



Pour  $\omega t - kz = 0$ , l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  est en A, pour  $\omega t - kz = \pi/2$ , elle est en B : l'onde est circulaire gauche.

9. Si on change le signe de la composante sur  $\vec{e}_y$ , l'onde est polarisée circulairement droite. Si on néglige l'action du champ magnétique de l'onde (hypothèse liée au caractère non relativiste des électrons, avec également une condition sur pulsation de l'onde, comme on le verra plus tard), la propagation est isotrope et le fait de changer le signe de la composante selon  $\vec{e}_y$  ne change rien à la propagation de l'onde.

10. Si on rajoute un champ magnétique statique, la force de Lorentz associée rompt la symétrie autour de l'axe  $Oz$  et la propagation d'une onde circulaire droite ne sera pas la même que celle d'une onde circulaire gauche.

*Difficile de savoir exactement quels arguments sont attendus.*

11. Modèle fluide : la longueur d'onde de l'onde électromagnétique est  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \approx \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{10^{11}} \approx 2$  cm. La distance moyenne entre deux particules est de l'ordre de  $5 \mu\text{m}$ , on peut donc définir une échelle mésoscopique, grande devant  $l$  et petite devant  $\lambda$ . On peut donc appliquer l'équation d'Euler.

Terme de pression : on a vu à la question 6 qu'on peut négliger les ondes acoustiques au sein du plasma. Par ailleurs le poids des électrons est négligeable devant la force de Lorentz. Il n'y a pas de terme de pression dans l'équation d'Euler.

La seule force qui intervient est donc la force électromagnétique. On obtient donc :

$$nm \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -ne \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge (\vec{B} + \vec{B}_1) \right).$$

En simplifiant par  $n$  et en divisant de chaque côté par  $m$ , on obtient l'équation demandée.

$$12. \frac{\|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{k \|\vec{V}\|^2}{\omega \|\vec{V}\|} \sim \frac{k}{\omega} \|\vec{V}\| = \frac{\|\vec{V}\|}{v_\phi}.$$

De même :  $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{\|\vec{V}\|B}{E}$ . Or d'après l'équation de Maxwell-Faraday (donc d'après la question 7),  $B \sim \frac{kE}{\omega} = \frac{E}{v_\varphi}$ . Donc :  $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{\|\vec{V}\|}{v_\varphi}$ .

L'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale et le terme magnétique de la force de Lorentz devant le terme électrique à condition que  $\|\vec{V}\|$  soit très inférieur à  $v_\varphi$ .

13. L'équation simplifiée est donc :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_1.$$

En projection sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ , on obtient :

$$\begin{cases} i\omega V_x &= -a + \Omega V_y \\ i\omega V_y &= ia - \Omega V_x, \end{cases}$$

en posant :  $a = eE_0/m$  et  $\Omega = -eB_1/m$ .

La résolution de ce système donne :

$$V_x = \frac{ia}{\omega + \Omega} \quad \text{et} \quad V_y = \frac{a}{\omega + \Omega}.$$

14.  $|\Omega| \simeq \frac{2 \times 10^{-19} \times 1}{9 \times 10^{-31}} \simeq 2 \times 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$ .

Pour calculer l'ordre de grandeur de  $a$ , il faut connaître celui du champ électrique. Pour cela, on utilise la donnée de la puissance du faisceau laser. La puissance surfacique moyenne d'une onde plane progressive harmonique est le module du vecteur de Poynting moyen, c'est-à-dire :  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$ .

Donc :  $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 s$  soit :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{\varepsilon_0 c s}} \approx \sqrt{\frac{6 \times 10^3}{(9 \times 10^{-12})(3 \times 10^8)10^{-4}}} \approx \sqrt{\frac{20}{9}} \times 10^5 \approx 1 \times 10^5 \text{ V.m}^{-1}.$$

Donc :  $a \approx \frac{(2 \times 10^{-19})(1 \times 10^5)}{9 \times 10^{-31}} \approx 2 \times 10^{16} \text{ m.s}^{-2}$ .

15. On projette l'équation (2) sur  $\vec{e}_z$ . Il vient :  $i\omega V_z = 0$ . Il n'y a donc pas de mouvement selon  $(Oz)$ . L'équation de conservation du nombre d'électrons (ou de la charge) est :  $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\vec{v}) = 0$ ,

ce qui donne ici :  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ . La densité  $n$  reste constante égale à  $n_0$ . Remarque : on peut aussi utiliser l'équation de Maxwell-Gauss. Le champ proposé est à divergence nulle donc la densité de charge dans le plasma est nulle. La densité d'électrons est alors égale à celle d'ions argon, elle reste égale à  $n_0$ .

16. Si  $\omega$  s'approche de  $|\Omega| = -\Omega$ , alors le dénominateur dans l'expression de  $V_x$  et de  $V_y$  tend vers zéro. Les vitesses  $V_x$  et  $V_y$  deviennent donc très grandes. Les hypothèses de plasma froid (question 12 - on ne peut plus linéariser l'équation d'Euler) et non relativiste (question 4) ne sont plus valables.

On veut que  $\frac{a}{|\omega + \Omega|}$  reste, par exemple, inférieure à 0,1  $v_\varphi$  et à 0,1  $c$ . Si on suppose  $v_\varphi \approx c$ , on veut donc que :  $|\omega + \Omega| < \frac{10a}{c} \approx \frac{2}{3} \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1} \approx 7 \times 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ .

### 1.3 Relation de dispersion et bande interdite

17. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :  $\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -n_0 e \vec{v} + \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$ . D'après l'expression du champ électrique donnée,  $\text{div} \vec{E} = 0$ . La méthode habituelle (on prend le rotationnel de l'équation de M.F, puis on utilise la définition du laplacien vectoriel) donne bien l'équation demandée.

18. On projette l'équation de la question précédente sur  $\vec{e}_x$  ou sur  $\vec{e}_y$  (on obtient la même chose).

Sur  $\vec{e}_x$  par exemple :  $-k^2 = -n_0 \mu_0 e i \omega V_x - \frac{\omega^2}{c^2}$ . En remplaçant  $V_x$  par l'expression obtenue à la question 13, on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega \omega_{pe}^2}{c^2(\omega + \Omega)}$$

On adimensionne cette équation en posant :  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{pe}}$  et  $\bar{k} = \frac{ck}{\omega_{pe}}$ . On obtient l'équation sous la forme demandée :

$$\bar{k}^2 = \bar{\omega}^2 - \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega} - 2\alpha},$$

en posant :  $\alpha = \frac{-\Omega}{2\omega_{pe}}$ .

$$19. \omega_{pe} \approx \frac{10^8 \times 2 \times 10^{-19}}{\sqrt{(9 \times 10^{-31})(9 \times 10^{-12})}} \approx \frac{2 \times 10^{-11}}{9 \times 10^{-43/2}} \approx \frac{2}{9} \sqrt{10} \times 10^{10} \approx 6 \times 10^9 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\frac{\omega_{pe}}{|\Omega|} \approx \frac{6 \times 10^9}{2 \times 10^{11}} \approx 3 \times 10^{-2}. \text{ On peut donc dire que } \omega_{pe} \ll |\Omega|.$$

$$\alpha \approx \frac{10^{11}}{6 \times 10^9} \approx \frac{100}{6} \approx 17. \text{ On est proche du } \alpha = 16 \text{ choisi pour les courbes : ouf!}$$

20. Si  $k^2$  est réel négatif,  $k$  est imaginaire pur et il n'y a pas propagation. Ca correspond sur la figure 1 à  $x \in ]32; 32,03[$  environ.

Il y a propagation pour  $\bar{k}^2 > 0$  donc pour  $\bar{\omega}$  solution de :  $\bar{\omega}^2 > \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega} - 2\alpha}$ , ou encore :  $\bar{\omega}^2 - 2\alpha\bar{\omega} - 1 > 0$  avec  $\bar{\omega} > 2\alpha$ .

Tous calculs faits, on obtient :  $\bar{\omega} \in ]2\alpha; \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}[$ .

Si  $B_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  d'où  $\bar{\omega}_{\text{sup}} \rightarrow \omega_{pe}$ . On retrouve le résultat du cours : une onde électromagnétique de pulsation inférieure à la pulsation plasma ne peut pas se propager dans le plasma.

21. Si on envoie une onde de pulsation interdite sur la cellule, elle donne naissance à une onde réfléchie qui emporte toute l'énergie de l'onde incidente et à une onde stationnaire évanescence dans le plasma, dont l'amplitude s'atténue avec la distance caractéristique  $\delta = \frac{1}{|k|}$ .

On observe le même type de comportement par exemple quand on envoie une onde dans domaine visible sur un métal comme le cuivre.

22. La vitesse de phase est définie par :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ . Quand  $\bar{\omega}$  tend vers  $\bar{\omega}_{\text{inf}} = 2\alpha$  par valeur inférieure,  $\bar{k}$  tend vers l'infini donc  $v_\varphi$  tend vers zéro. Les hypothèses de plasma froid (question 12) et non relativiste (question 4) ne sont plus valables.

## 2 Transparence électromagnétique induite

### 2.1 Réponse du plasma

23. Les hypothèses pour l'onde pompe sont exactement les mêmes que dans la première partie. Comme  $\text{div} \vec{E}_P = 0$ , on a bien  $n_P = n_0$  puis :

$$\vec{v}_P = \Re \left\{ \frac{a_P}{\omega_P + \Omega} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] \right\}$$

Donc, avec  $\omega_P + \Omega = -\omega_{pe}$ , il vient :

$$\vec{v}_P = \frac{a_P}{\omega_{pe}} \begin{bmatrix} \sin(\omega_P t - k_P z) \\ -\cos(\omega_P t - k_P z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

24. L'équation locale de conservation du nombre d'électrons s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \vec{v}) = 0.$$

Avec  $n(z, t) = n_P + n_S(z, t) = n_0 + n_S(z, t)$  et  $\vec{v} = \vec{v}_P + \vec{v}_S$ , il vient :  $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n_S}{\partial t}$  et  $\text{div}(n \vec{v}) = \frac{\partial n v_z}{\partial z}$  donc :

$$\frac{\partial n_S}{\partial t} + \frac{\partial(n v_z)}{\partial z} = 0,$$

avec  $v_z(z, t) = v_S(z, t)$  d'après l'expression de  $\vec{v}_P$  obtenue à la question 23.

Donc en présence d'un petit mouvement longitudinal, le terme  $\frac{\partial(n v_S)}{\partial z} \neq 0$ , ce qui entraîne que  $\frac{\partial n_S}{\partial t} \neq 0$  : ce petit mouvement longitudinal entraîne un petit excédent de densité électronique.

Au premier ordre, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial n_S}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_S}{\partial z} = 0.$$

25. L'équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E} = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} - \frac{(n_P + n_S) e}{\epsilon_0}$  devient :  $\text{div} \vec{E} = -\frac{n_S e}{\epsilon_0}$ , soit :

$$\frac{\partial E_L}{\partial z} = -\frac{n_S e}{\epsilon_0}.$$

26. On dérive l'équation précédente par rapport à  $t$ , on intervertit les dérivées partielles par rapport à  $t$  et à  $z$ , on utilise l'équation de la question 24 puis on intègre l'équation obtenue par rapport à  $z$ . Il vient :

$$\frac{\partial E_L}{\partial z} = \frac{e n_0}{\epsilon_0} v_{S z}.$$

La constante d'intégration, fonction du temps, est nulle car en l'absence de mouvement longitudinal, il n'y a pas de champ additionnel.

27. L'équation (6) ressemble à celle d'un oscillateur harmonique en présence d'une excitation comportant plusieurs pulsations. La pulsation plasma  $\omega_{pe}$  joue le rôle de la pulsation propre de l'oscillateur.

**28.** Si on intègre l'équation de la question 26 par rapport au temps, on voit que le champ électrique additionnel  $E_L$  est proportionnel au déplacement des électrons  $\xi(z, t)$  selon l'expression :  $E_L = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \xi(z, t)$ . La force de Lorentz est une force rappel élastique :  $\vec{F}L = \frac{-e n_0 e}{m \epsilon_0} \xi(z, t) \vec{e}_z = -\omega_{pe}^2 \xi(z, t) \vec{e}_z$ . C'est donc le champ créé par le déplacement des électrons, proportionnel à ce déplacement, qui est à l'origine de ce terme de rappel élastique.

**29.** Terme de forçage induit par le battement entre l'onde sonde et l'onde pompe :

$$\frac{k_S a_P a_S}{\omega_S} \frac{\Delta \omega}{\omega_{pe}} \cos(\Delta \omega t - \Delta k z).$$

Terme de couplage avec le mouvement transverse : l'autre terme dans le membre de droite.

Pout calculer l'ordre de grandeur de  $a_S$ , il faut celui de  $E_S$ . La puissance de l'onde sonde est  $10^4$  fois plus faible que celle de l'onde pompe donc  $E_S = 10^{-2} E_P \approx 10^3 \text{ V.m}^{-1}$ , puis  $a_S \approx a_P / 100 \approx 2 \times 10^{16} \text{ m.s}^{-2}$ .

**30.** Pour l'équation traduisant le mouvement transverse : le terme de pulsation  $\omega_S$  s'interprète comme un forçage à la pulsation de l'onde sonde, le terme de pulsation  $\omega_P$  comme un couplage avec le mouvement longitudinal (il fait intervenir la vitesse  $v_{sz}$ ).

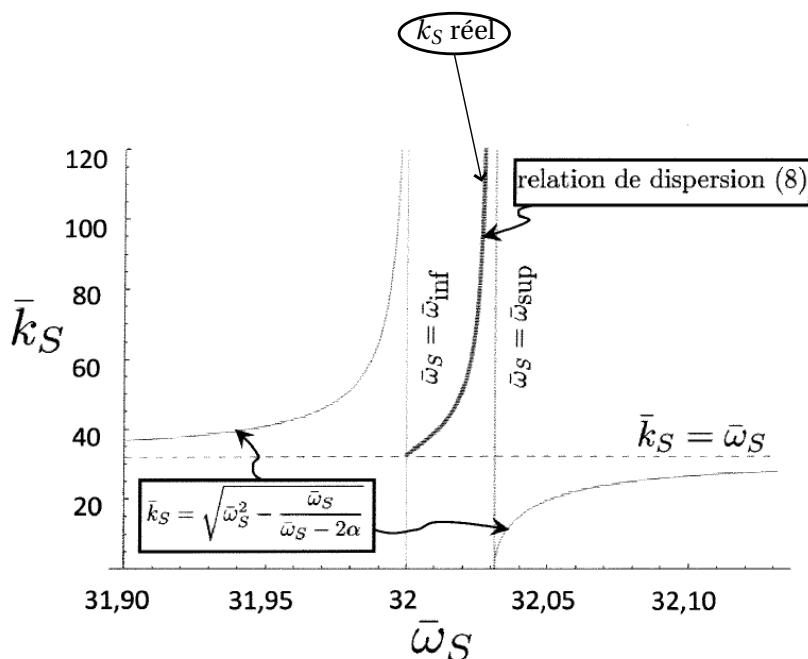
## 2.2 Relation de dispersion et transparence électromagnétique induite

**31.** Si l'intensité de l'onde pompe est nulle,  $E_P = 0$  donc  $a_P$  et donc  $\Omega_R$  sont nuls. Dans ce cas,  $\delta \omega_0(k_S) = 0$ . L'équation (8) se simplifie en :

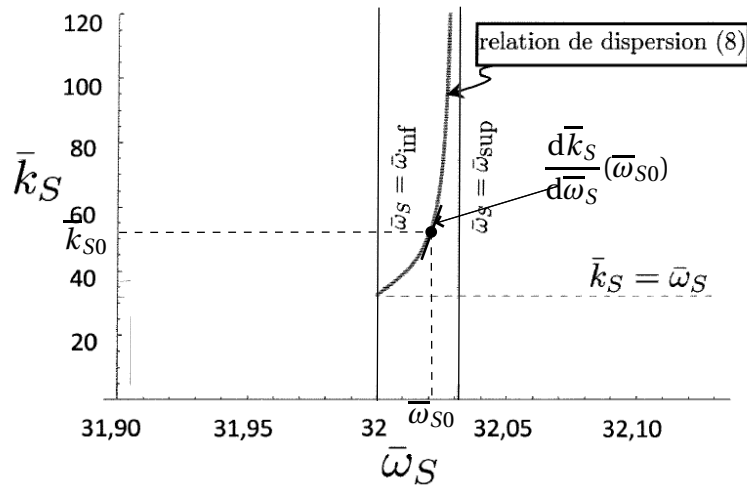
$$k_S^2 c^2 = \omega_S^2 - \frac{\omega_S \omega_{pe}^2}{\omega_S + \Omega}.$$

C'est bien l'équation que nous avons obtenu à la question 18 avant de passer en grandeurs adimensionnées.

**32.** Dans la zone interdite précédemment,  $k_S$  est réel, la propagation est possible.



**33.**  $v_{\phi,S} = \frac{\omega_S}{k_S} = c \frac{\bar{\omega}_S}{\bar{k}_S}$  et  $v_{g,S} = \frac{d\omega_S}{dk_S} = c \frac{d\bar{\omega}_S}{d\bar{k}_S}$ .



Pour une pulsation  $\bar{\omega}_{S0}$  donnée, la vitesse de groupe est l'inverse de la pente (voir figure ci-dessus). La pente est toujours plus grande que  $\frac{\bar{k}_S}{\bar{\omega}_S}$  comme on le voit sur la figure. La vitesse de groupe est donc inférieure à la vitesse de phase.

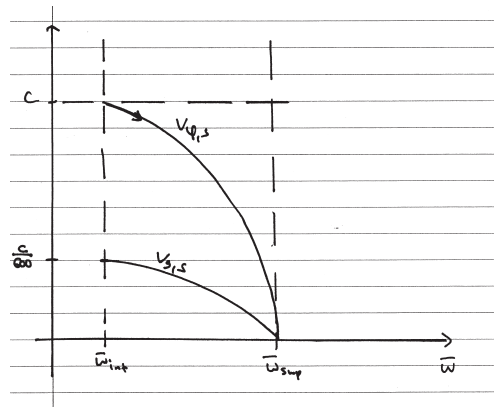
De plus,  $\bar{k}_S$  est toujours supérieur ou égal à  $\bar{\omega}_S$  donc la vitesse de phase est inférieure ou égale à  $c$ .

La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont des fonctions décroissantes de  $\bar{\omega}_S$  puisque  $\bar{k}_S$  est une fonction croissante de la pulsation réduite.

Pour  $\bar{\omega}_S \rightarrow \bar{\omega}_{sup}$ ,  $\bar{k}_S$  tend vers l'infini, tout comme la pente de la courbe. Donc la vitesse de phase et la vitesse de groupe tendent vers zéro.

Pour  $\bar{\omega}_S \rightarrow \bar{\omega}_{inf}$ , la vitesse de phase est égale à  $c$  puisque la courbe démarre au niveau de la courbe en tiretés. On évalue la pente de la courbe en ce point-là à 600 environ donc  $v_{g,S}(\bar{\omega}_{inf}) \approx \frac{c}{600}$ .

L'allure des courbes est la suivante :



Remarque :  $\frac{dv_{\phi,S}}{d\bar{\omega}_S} = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{v_{\phi,S}}{v_{g,S}} \right)$  donc en  $\bar{\omega}_{inf}$ , la pente est non nulle.

**34.** La vitesse de groupe dépend de la pulsation : le paquet d'onde se déforme au fur et à mesure de sa propagation (il s'étale).

**35.** Si l'intensité de l'onde pompe augmente, la dépendance de  $\bar{k}_S$  en fonction de  $\bar{\omega}_S$  est moins forte : la dispersion est moins importante, le paquet d'onde s'étale moins. La dernière courbe est presque rectiligne : dans ce cas, la vitesse de groupe ne dépend plus de la pulsation. Le paquet d'onde se propage à la vitesse de groupe sans se déformer.

Corrigé proposé par ÉMILIE FRÉMONT & MARIE-NOËLLE SANZ