

A Rendement énergétique du réseau

A.I Puissance perdue dans la ligne

1. L'intensité peut être considérée comme uniforme sur toute la ligne si l'approximation des régimes quasi stationnaires peut être utilisé.
2. Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, la loi des mailles s'écrit en notant Z l'impédance de la ligne $\underline{u}_S(t) = Z\underline{i}(t) + \underline{u}_D(t)$.
Si $\|Z\underline{i}\| \ll \|\underline{u}_S\|$, alors on pourra considérer que $u_D(t) = u_S(t)$.
3. L'effet JOULE dans les conducteurs est la principale cause de perte énergétique.
4. La puissance moyenne perdue est $\langle p_L(t) \rangle = Kd\langle i^2(t) \rangle = kdI^2$, donc I est la valeur efficace de l'intensité $i(t)$.
5. Si on assimile la ligne a un cylindre de longueur d , de section d'aire S constitué d'un conducteur ohmique de conductivité γ , alors la résistance de la ligne est $R = \frac{\gamma d}{S}$ et la puissance dissipée par effet JOULE est $p_L(t) = Ri^2(t)$.
Dans ce cas $K = \frac{\gamma}{S}$. Les facteurs qui modifient la valeur de K sont donc :
 - la conductivité électrique des matériaux qui constituent la ligne;
 - l'aire de la section de la ligne.

A.II Le facteur de puissance

6. L'intensité $i(t)$ est sinusoïdale si la charge est constituée de dipôles linéaires et de générateurs sinusoïdaux de fréquence f .

Pour le réseau de distribution européen :

$U_0 = 230 \text{ V}$	valeur efficace de la tension
$f = 50 \text{ Hz}$	fréquence

Si on note d la longueur de la ligne, c la vitesse des ondes électromagnétiques planes progressives et f la fréquence de la tension, l'approximation des régimes quasi stationnaires est vérifiée si $d \ll \frac{c}{f}$.

Pour un réseau de distribution dont la fréquence est $f = 50 \text{ Hz}$, cela implique $d \ll 6 \cdot 10^3 \text{ km}$.

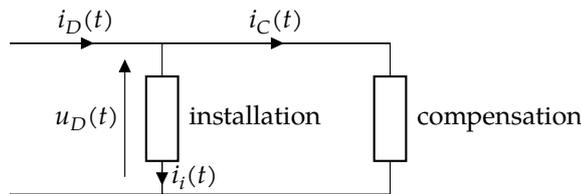
7. Les équations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{P}{P + P_L} \quad \text{définition du rendement} \\ P = U_0 I_0 \cos \varphi \quad \text{puissance reçue par l'installation} \\ P_L = KdI_0^2 \quad \text{puissance dissipée dans la ligne} \end{array} \right.$$

En éliminant I_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{P}{P + P_L} \\ P_L = \frac{KdP^2}{U_0^2 \cos^2 \varphi} \end{array} \right. \quad \text{Donc } \eta = \frac{1}{1 + \frac{KdP}{U_0^2 \cos^2 \varphi}}$$

8. Le rendement peut être augmenté en augmentant la valeur de U_0 . Cette solution est souvent utilisée pour le transport de l'énergie électrique. Un transformateur élévateur est placé en début de ligne, un transformateur abaisseur en fin de ligne, la valeur efficace de la tension est alors de 400 kV sur le réseau très haute tension, ou de 225 kV sur le réseau haute tension.
9. La puissance instantanée reçue par le dispositif de compensation est $p_C(t) = u_D(t)i_c(t)$.
La valeur moyenne de cette puissance est donc $P_C = U_0 I_C \cos \varphi_C$. Cette puissance est nulle si $\cos \varphi_C = 0$.
La puissance P_C est nulle si $i_c(t)$ est en quadrature avec $u_D(t)$.
10. On considère le schéma électrique suivant :



Les grandeurs électriques sont :

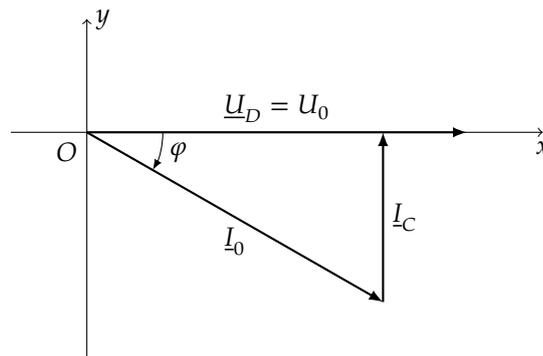
$$\begin{cases} u_C(t) = U_0 \sqrt{2} \cos(2\pi f t) & \text{tension aux bornes de l'installation} \\ i_C(t) = I_C \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \varphi_C) & \text{intensité dans la compensation} \\ i_i(t) = i(t) = I_0 \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \varphi) & \text{intensité dans l'installation} \\ i_D(t) = i_i(t) + i_C(t) = I_D \sqrt{2} \cos(2\pi f t + \varphi_D) & \text{intensité dans la ligne} \end{cases}$$

L'étude du rendement est identique à celle faite à la question 7 :

$$\begin{cases} \eta = \frac{P}{P + P_L} & \text{définition du rendement} \\ P = U_0 I_0 \cos \varphi = U_0 I_D \cos \varphi_D & \text{puissance reçue par l'installation} \\ P_L = K d I_D^2 & \text{puissance dissipée dans la ligne} \end{cases}$$

Le rendement est donc : $\eta = \frac{1}{1 + \frac{K d P}{U_0^2 \cos^2 \varphi_D}}$

Le rendement est maximal si $\cos \varphi_D = 0$, le diagramme de FRESNEL pour les intensités est alors :



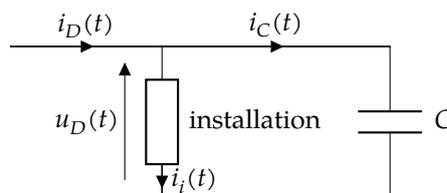
La valeur efficace de l'intensité i_C est alors $I_C = -I_0 \sin \varphi$ et la phase est $\varphi_C = \frac{\pi}{2}$.

Donc $i_C(t) = -I_0 \sin \varphi \sqrt{2} \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right)$

Donc $i_C(t) = I_0 \sin \varphi \sqrt{2} \sin(2\pi f t)$

Or $U_0 I_0 \cos \varphi = P$, donc $i_C(t) = \frac{P}{U_0} \tan \varphi \sqrt{2} \sin(2\pi f t)$

11. Un condensateur placé en parallèle sur la charge permet de réaliser la même fonction :



Dans cette situation : $i_C(t) = C j \omega u_D(t)$.

En utilisant l'expression précédente de $i_C(t)$: $\frac{P}{U_0} \tan \varphi \sqrt{2} \sin(2\pi f t) = -C 2\pi f U_0 \sqrt{2} \sin(2\pi f t)$

La capacité du condensateur de compensation est $C = \frac{-P \tan \varphi}{2\pi f U_0^2}$

12. • Le stator d'un moteur synchrone est constitué de conducteurs bobinés : ce type de circuit présente une inductance élevée d'impédance $jL\omega = jX$. On choisit donc $X > 0$.
- Si la machine synchrone a un rotor bobiné alimenté par un courant d'intensité I_e , la valeur efficace de la force contre-électromotrice induite est une fonction croissante de I_e .

L'utilisateur peut régler la valeur de E en choisissant celle du courant d'excitation.

- Pour une machine synchrone, la vitesse de rotation du rotor est égale à la pulsation de la tension d'alimentation. Et la pulsation de la force contre-électromotrice induite est égale à la vitesse de rotation du rotor : la fréquence de la force électromotrice est donc égale à celle de la tension d'alimentation.

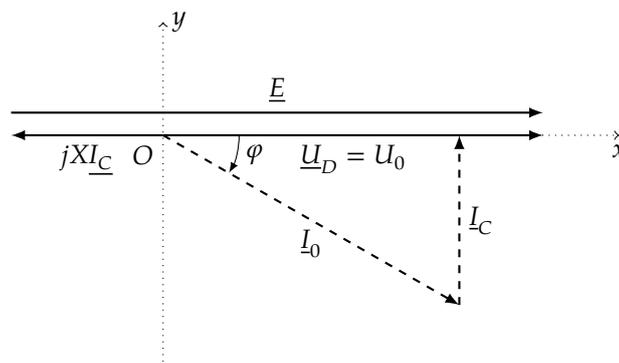
13. L'équation électrique du dispositif de compensation est : $\underline{U}_D = jXI_C + \underline{E}$.

Dans le modèle étudié, les pertes énergétiques dans le moteur sont nulles, et celui-ci tourne à vide, il ne fournit donc aucune puissance mécanique à l'extérieur. La puissance électrique consommée par le moteur est donc nulle. La force contre-électromotrice e et l'intensité i_C sont donc en quadrature.

Or, pour que les pertes dans la ligne soient minimales, il faut que u_D et i_C soient en quadrature. Donc u_D et e sont en phase ou en opposition de phase.

Or, le déphasage entre la force contre-électromotrice et la tension d'alimentation du moteur est égale à l'angle entre l'axe des pôles rotoriques et le champ magnétique statorique. Le fonctionnement du moteur est stable lorsque cet angle est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Donc u_D et e sont en phase.

Le diagramme de FRESNEL correspondant est alors :

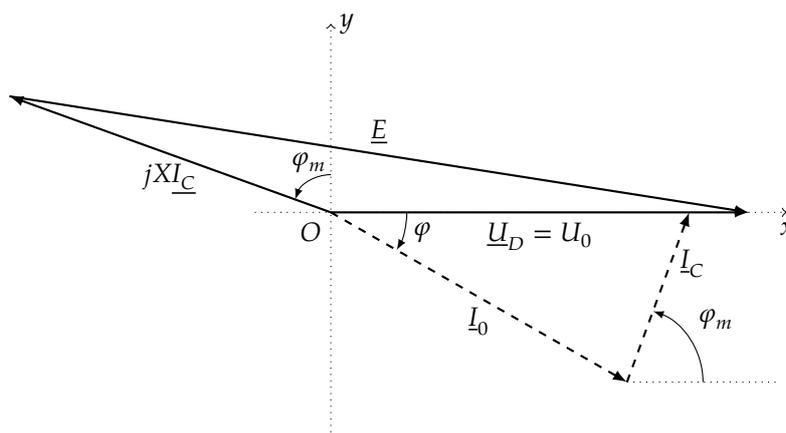


Les équations électriques sont :

$$\begin{cases} E = U_0 + XI_C & \text{valeur efficace de la force contre-électromotrice} \\ I_C = -I_0 \sin \varphi & \text{redressement du facteur de puissance} \\ P = U_0 I_0 \cos \varphi & \text{puissance reçue par l'installation} \end{cases}$$

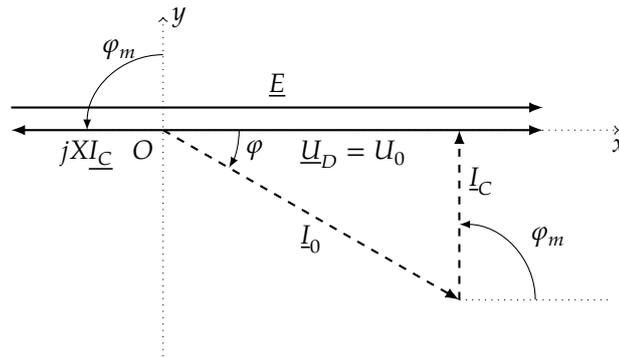
Donc $E = U_0 - \frac{XP}{U_0} \tan \varphi$

14. Lorsque l'on tient compte des pertes énergétiques, et dans le cas du redressement du facteur de puissance, le diagramme de FRESNEL est :

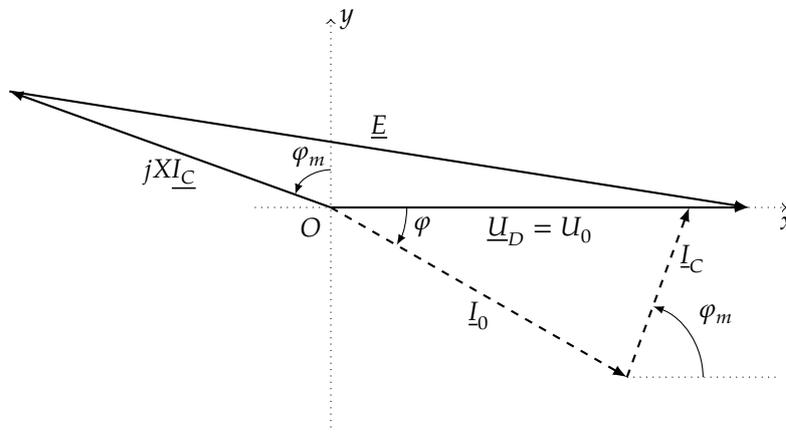


L'angle φ_m est le déphasage entre l'intensité i_C et la tension u_D .

Dans le cas où la puissance reçue par le compensateur synchrone est nulle, $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$ est le diagramme est :



15. Les équations électriques correspondant au diagramme de FRESNEL suivant :



$$\left\{ \begin{array}{ll} I_0 \sin \varphi = -I_C \sin \varphi_m & \text{redressement du facteur de puissance} \\ P = U_0 I_0 \cos \varphi & \text{puissance reçue par l'installation} \\ P_c = U_0 I_C \cos \varphi_m & \text{puissance reçue par le compensateur} \\ E^2 = U_0^2 + X^2 I_C^2 + 2U_0 X I_C \sin \varphi_m & \text{d'après le diagramme de FRESNEL} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} I_C \sin \varphi_m = -I_0 \sin \varphi \\ I_C \cos \varphi_m = \frac{P_c}{U_0} \\ I_0 = \frac{P}{U_0 \cos \varphi} \\ E^2 = U_0^2 + X^2 I_C^2 - 2XP \tan \varphi \end{array} \right. \quad \text{d'où : } \left\{ \begin{array}{l} I_C^2 = I_0^2 \sin^2 \varphi + \frac{P_c^2}{U_0^2} \\ I_0 = \frac{P}{U_0 \cos \varphi} \\ E^2 = U_0^2 + X^2 I_C^2 - 2XP \tan \varphi \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} I_C^2 = \left(\frac{P}{U_0 \cos \varphi} \right)^2 \sin^2 \varphi + \frac{P_c^2}{U_0^2} \\ E^2 = U_0^2 + X^2 I_C^2 - 2XP \tan \varphi \end{array} \right. \quad \text{d'où : } E^2 = U_0^2 - 2XP \tan \varphi + \left(\frac{XP}{U_0} \tan \varphi \right)^2 + \left(\frac{XP_c^2}{U_0} \right)^2$$

La force contre-électromotrice est donc
$$E = \sqrt{\left(U_0 - \frac{XP}{U_0} \tan \varphi \right)^2 + \left(\frac{XP_c^2}{U_0} \right)^2}$$

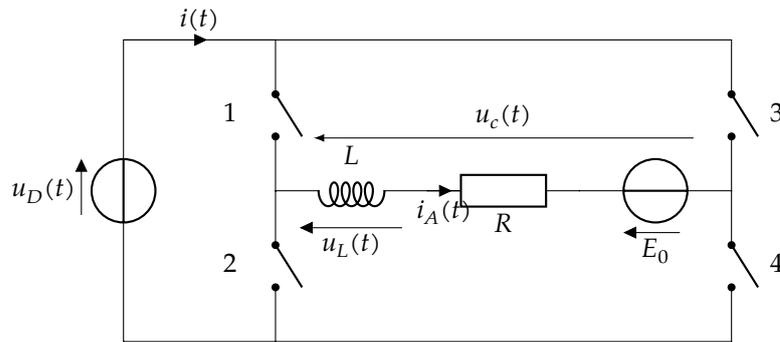
A.III Le facteur de forme

16. • $E_0(t)$ représente la force électromotrice d'un accumulateur. Cette valeur augmente au cours de la charge de l'accumulateur, elle n'est donc pas constante.

- Le temps caractéristique pour la charge d'une batterie est de l'ordre de l'heure, alors que la période de la tension $u_D(t)$ est 20 ms. Les évolutions de $E_0(t)$ seront négligeables pendant l'étude de quelques périodes. On pourra considérer que E_0 est une constante.

17. Le convertisseur étudié relie deux sources de tension : cela ne peut pas être réalisé par un convertisseur direct. La bobine d'inductance L permet de réaliser un hacheur indirect et donc de transférer de l'énergie de la ligne vers l'accumulateur.

18. L'équation électrique de la branche centrale est : $L \frac{di_A(t)}{dt} + Ri_A(t) + E_0 = u_c(t)$



Donc $\frac{di_A}{dt} = \frac{1}{L} [u_c(t) - Ri_A(t) - E_0]$

Si L est assez grand, les fluctuations d'intensité $\left| \frac{di_A}{dt} \right|$ peuvent être suffisamment petites pour que $i_A(t)$ soit toujours positif.

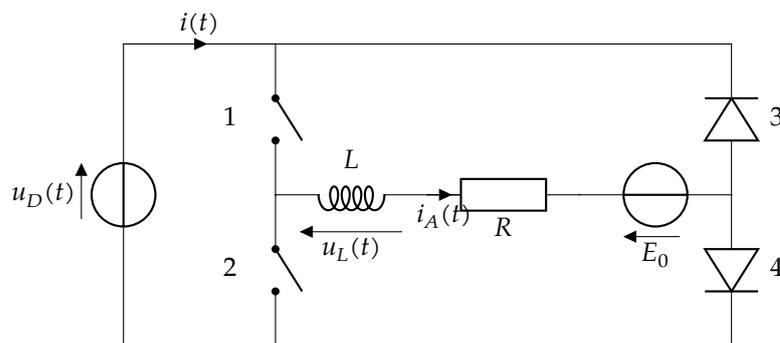
19. • La source d'entrée ne peut pas être en court-circuit : $\begin{cases} 1,2 & \text{ne peuvent pas être fermés simultanément} \\ 3,4 & \text{ne peuvent pas être fermés simultanément} \end{cases}$

• L'intensité dans la bobine ne doit pas s'annuler : $\begin{cases} 1,2 & \text{ne peuvent pas être ouverts simultanément} \\ 3,4 & \text{ne peuvent pas être ouverts simultanément} \end{cases}$

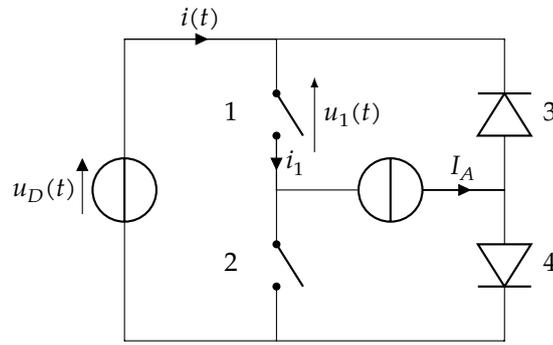
• Conclusion : $\begin{cases} 1,2 & \text{ont un fonctionnement complémentaire} \\ 3,4 & \text{ont un fonctionnement complémentaire} \end{cases}$

20. Pour que l'intensité i_A ne s'annule pas, il faut que deux interrupteurs au moins soient fermés simultanément. La liste des couples des interrupteurs qui peuvent être utilisés est (1,3), (1,4), (2,3), (2,4).

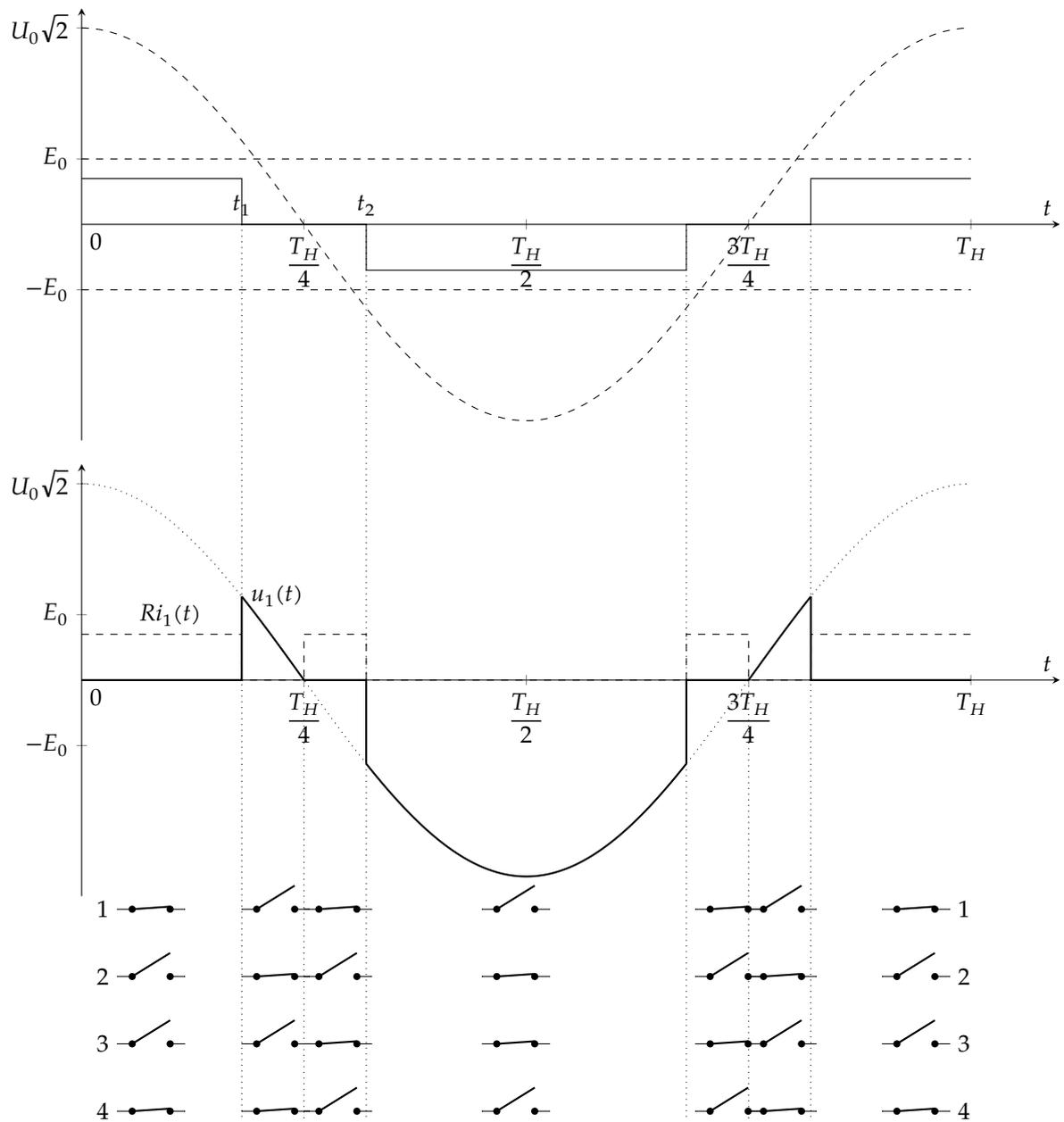
21. Les diodes 3 et 4 sont placées telle sorte que l'intensité i_A soit positive :



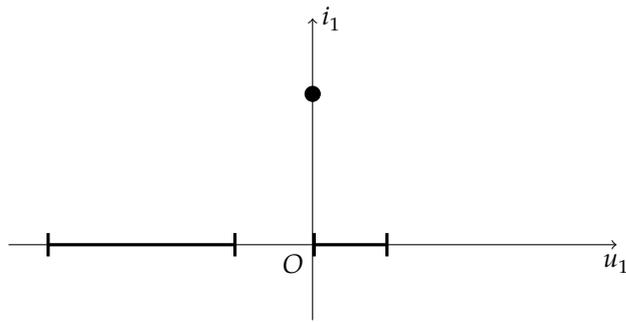
22. D'après la simulation proposée, la charge se comporte comme une source de courant. Le montage est donc :



Les différentes tensions et courants étudiés sont donc représentés par ces courbes :

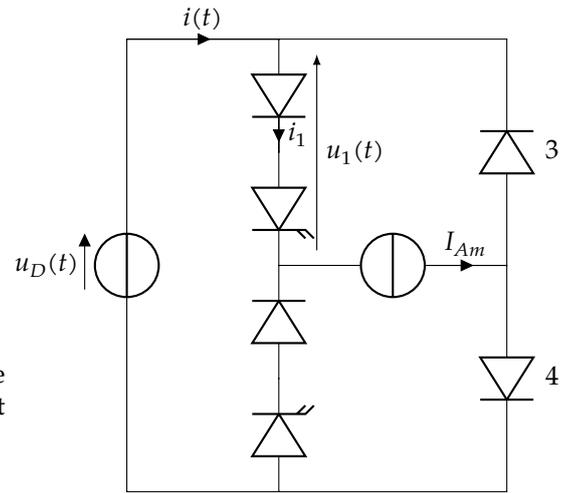


23. Les points de fonctionnement sur la caractéristique de l'interrupteur 1 sont alors :

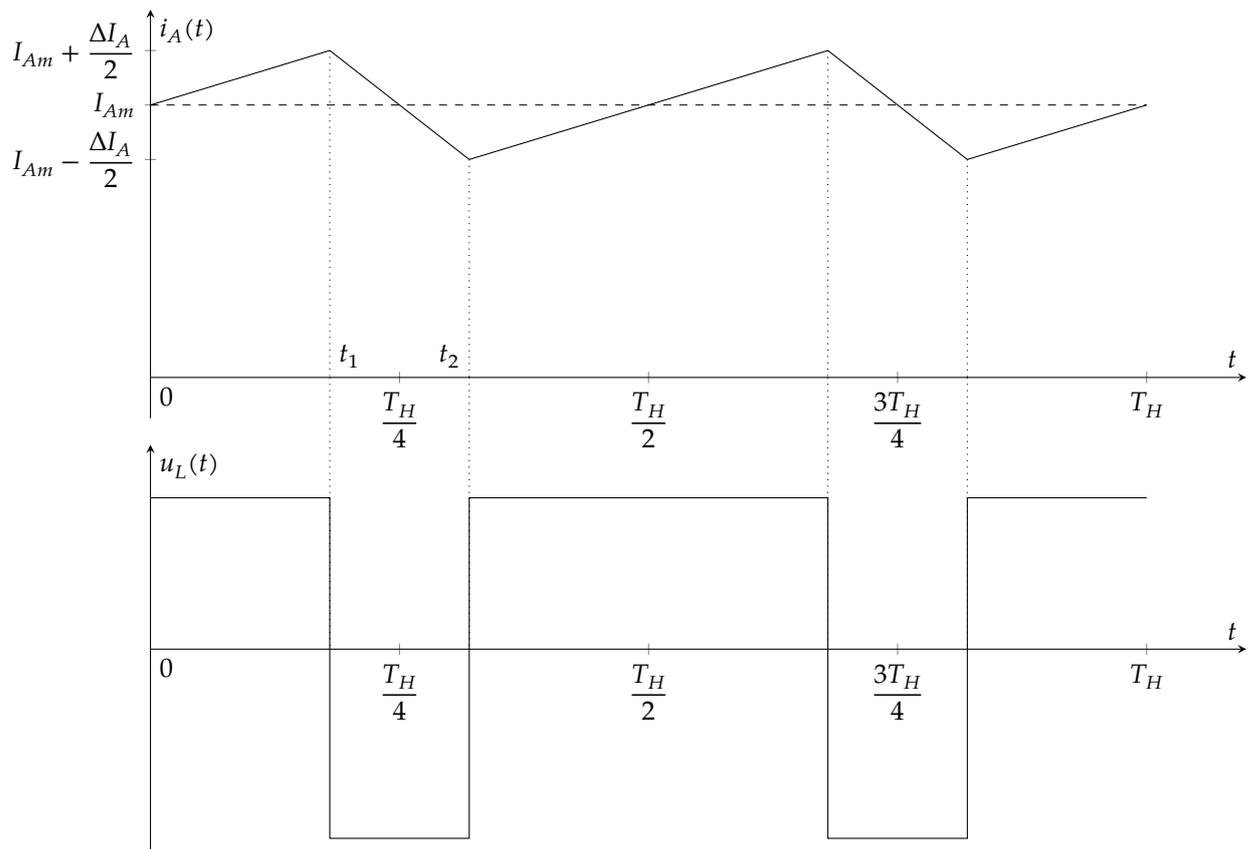


Il faut donc utiliser un transistor ou un thyristor réversible en tension. L'interrupteur 1 peut aussi être réalisé en utilisant une association série d'un transistor et d'une diode.

Le montage étudié est alors celui ci-contre.



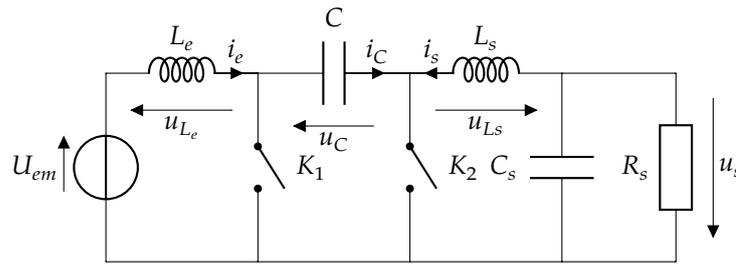
24. • Avec la modélisation proposée par l'énoncé, $i_A(t) = I_{Am}$. Le tension aux bornes de la bobine est donc nulle : $u_L(t) = L \frac{di_A(t)}{dt} = 0$
- Pour tenir compte de façon qualitative des fluctuations d'intensité, on peut considérer que la bobine accumule de l'énergie magnétique pendant les phases où $i(t)$ est non-nul et que la bobine restitue cette énergie pendant les phases où $i(t)$ est nul. On peut alors tracer les courbes représentant $i_A(t)$ et $u_L(t)$:



25. L'intensité dans la ligne n'est pas sinusoïdale, mais présente des harmoniques de fréquence nf avec n impair. Ceci pose plusieurs problèmes :
- les pertes par courants de FOUCAULT dans les transformateurs présents sur la ligne sont à peu près proportionnelles au carré de la fréquence du courant : une harmonique de fréquence élevée peut donc entraîner un échauffement important.
 - Le courant non-sinusoïdale crée des tensions non-sinusoïdales pour les autres utilisateurs de la lignes. Cela peut affecter le fonctionnement des appareils électroniques utilisés.
 - ...

A.IV L'élévation de tension

26. Le montage proposé est :



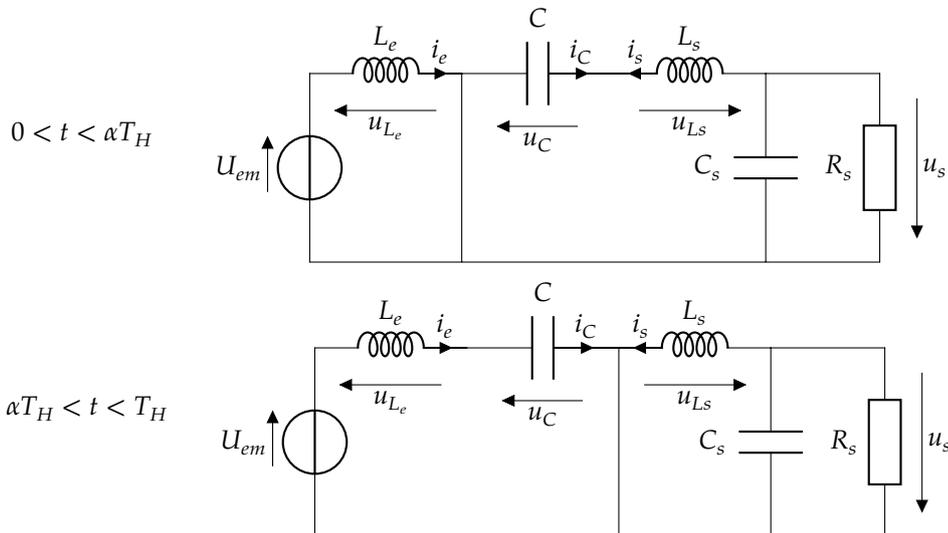
- L'intensité traversant le condensateur est $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$. Sa valeur moyenne est donc $\langle i_C \rangle = \frac{C}{T_H} \int_0^{T_H} \frac{du_C}{dt} dt$.

Donc $\langle i_C \rangle = \frac{C}{T_H} [u_C(T_H) - u_C(0)]$.

Comme la tension $u_C(t)$ est périodique de période T_H : $\langle i_C \rangle = 0$

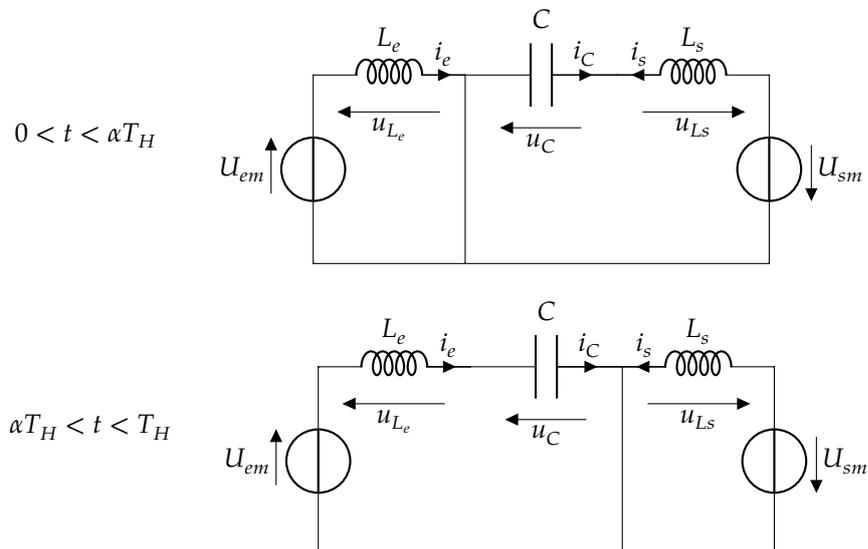
- De la même façon, la tension aux borne de la bobine étant $u_{L_e} = L_e \frac{di_e}{dt}$, on en déduit $\langle u_{L_e} \rangle = 0$

27. Les deux états du montage sont :



Il est difficile de déterminer les temps caractéristiques d'évolution de ces montages, à l'exception de $\sqrt{L_e C}$ pour le deuxième état.

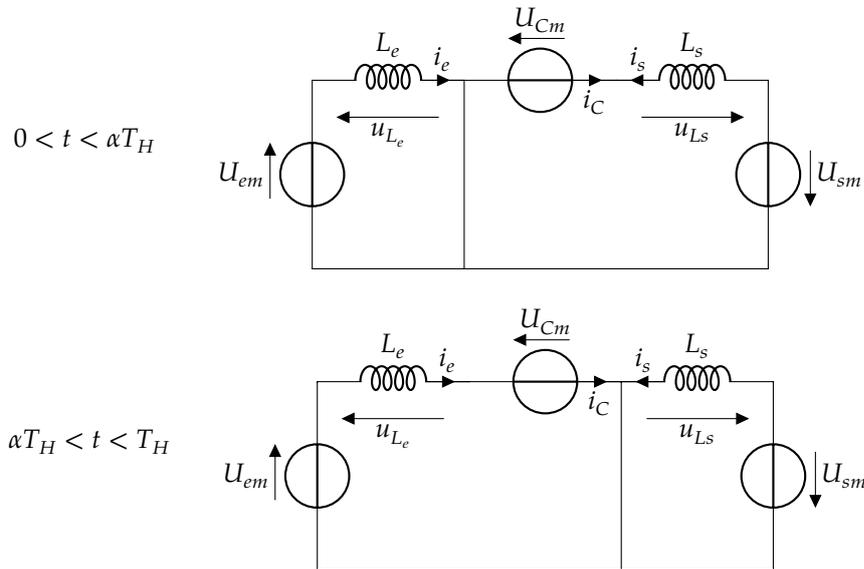
Si on utilise la modélisation proposée à la question 28, les schémas deviennent :



Les temps caractéristiques d'évolution du système sont donc $\sqrt{L_e C}$ et $\sqrt{L_s C}$.

Les tensions et les intensités seront affines par morceaux si $\begin{cases} T_H \ll \sqrt{L_e C} \\ T_H \ll \sqrt{L_s C} \end{cases}$

28. Si on considère que $u_e(t)$, $u_s(t)$ et $u_c(t)$ sont constantes, le montage est équivalent à :

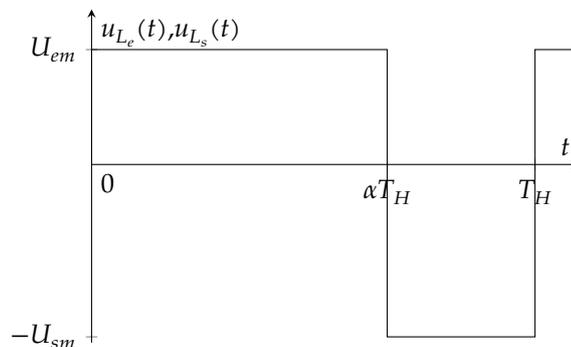


29. La loi des mailles s'écrit : $U_{em} + U_{sm} + u_{L_s}(t) = U_{cm} + u_{L_e}(t)$.

En prenant la valeur moyenne et en tenant compte de $\begin{cases} \langle u_{L_e} \rangle = 0 \\ \langle u_{L_s} \rangle = 0 \end{cases} : U_{em} + U_{sm} = U_{cm}$

Donc $u_{L_s}(t) = u_{L_e}(t)$.

Et $\begin{cases} u_{L_e}(t) = u_{L_s}(t) = U_{em} & \text{pour } 0 < t < \alpha T_H \\ u_{L_e}(t) = u_{L_s}(t) = -U_{sm} & \text{pour } \alpha T_H < t < T_H \end{cases}$



30. La valeur moyenne de u_{L_e} est : $\begin{cases} \langle u_{L_e} \rangle = 0 & \text{d'après 26} \\ \langle u_{L_e} \rangle = \alpha U_{em} - (1 - \alpha)U_{sm} & \text{d'après le graphique précédent} \end{cases}$

Donc $U_{sm} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} U_{em}$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors $U_{sm} > U_{em}$: Le hacheur peut être survolteur.

31. Toute la puissance fournie par le générateur d'entrée est dissipée par effet JOULE dans la résistance R_s :

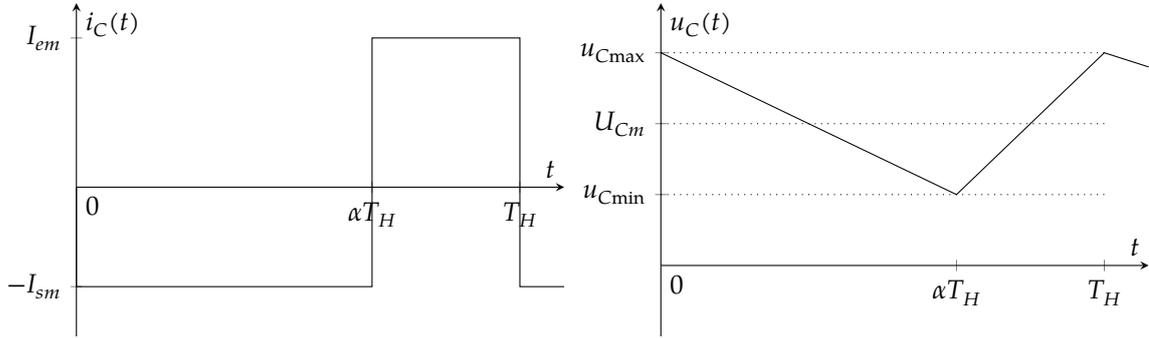
$$U_{em} I_{em} = \frac{U_{sm}^2}{R_s}$$

$$\text{Donc } I_{em} = \frac{U_{em}}{R_s} \left(\frac{U_{sm}}{U_{em}} \right)^2$$

En utilisant le résultat de la question précédente : $I_{em} = \frac{U_{em}}{R_s} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2$

32.

33. L'intensité $i_C(t)$ et la tension $u_C(t)$ sont telles que : $i_C = C \frac{du_C}{dt}$:



$$\text{Donc } \int_{\alpha T_H}^{T_H} i_C(t) dt = C \int_{\alpha T_H}^{T_H} \frac{du_C}{dt} dt.$$

$$\text{D'où : } I_{em}(1 - \alpha)T_H = C [u_C(T_H) - u_C(\alpha T_H)]. \text{ Or } \begin{cases} u_C(\alpha T_H) = u_{Cmin} \\ u_C(T_H) = u_{Cmax} \end{cases}$$

$$\text{Donc } u_{Cmax} - u_{Cmin} = \frac{(1 - \alpha)T_H I_{em}}{C}$$

$$\text{Et, le taux d'ondulation défini par l'énoncé est : } \Delta_{u_C} = \frac{(1 - \alpha)T_H I_{em}}{2C U_{Cm}}$$

$$\text{En utilisant les résultats précédents : } \begin{cases} I_{em} = \frac{U_{em}}{R_s} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \\ U_{Cm} = U_{em} + U_{sm} \\ U_{sm} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} U_{em} \end{cases} \text{ . Donc } \begin{cases} I_{em} = \frac{U_{em}}{R_s} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \\ U_{Cm} = \frac{1}{1 - \alpha} U_{em} \end{cases} .$$

$$\text{Le taux d'ondulation est alors } \boxed{\Delta_{u_C} = \frac{\alpha^2 T_H}{R_s C}}$$

34. Pour diminuer les pertes en ligne, il faut réduire l'intensité I dans la ligne tout en gardant la puissance transportée $U_0 I$ constante. On peut placer un hacheur survolteur à l'entrée de la ligne et un hacheur dévolteur à la fin de la ligne. Cette solution est similaire à celle réalisée avec des transformateurs en régime sinusoïdal.

35. Les puissances utiles sont : $\begin{cases} P_L = KdI^2 & \text{puissance dissipée dans la ligne sans élévation de tension} \\ P'_L = Kd(I')^2 & \text{puissance dissipée dans la ligne avec élévation de tension} \\ P = UI_0 & \text{puissance reçue par la charge} \end{cases}$

On note $\begin{cases} \epsilon = 1 - \eta = 1 \cdot 10^{-2} & \text{rendement sans élévation de tension} \\ \epsilon' = 1 - \eta' = 1 \cdot 10^{-4} & \text{rendement avec élévation de tension} \end{cases}$

$$\text{Donc } \eta = \frac{1}{1 + \frac{KdI^2}{P}}, \text{ et } \epsilon = \frac{\frac{KdI^2}{P}}{1 + \frac{KdI^2}{P}}.$$

Ce que peut se simplifier pour des rendements proches de 1 : $\epsilon = \frac{KdI^2}{P}$

$$\text{Donc } \frac{\epsilon'}{\epsilon} = \left(\frac{I'}{I} \right)^2. \text{ D'où } \frac{\epsilon'}{\epsilon} = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\text{Donc } \boxed{\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}}}}. \text{ Soit } \boxed{\alpha = 0,91}$$

B Incident dans les lignes

B.I Analogie avec la corde vibrante

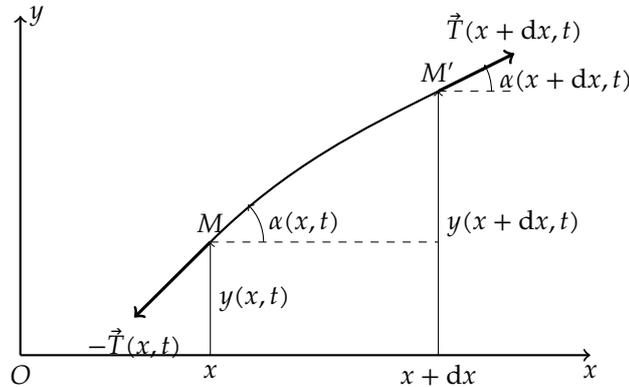
B.I.A Généralités sur la corde vibrante

36. Pour l'étude de la corde vibrante, les approximations usuelles sont :

$$\begin{cases} |y(x,t)| \ll L & \text{faibles déformations} \\ \left| \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right| \ll 1 & \text{la corde fait de petits angles avec l'axe } Ox \end{cases}$$

La tension de la corde est de la forme $\vec{T}(x,t) = T(x,t)\vec{u}(x,t)$ où $\vec{u}(x,t)$ est un vecteur unitaire tangent à la corde en x .

37. On considère un petit élément de corde entre x et $x + dx$ et on note $\alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ l'angle entre la corde et Ox :



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à MM' est : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)$

Donc en projection sur Ox et Oy :

$$\begin{cases} 0 = T(x+dx,t) \cos \alpha(x+dx,t) - T(x,t) \cos \alpha(x,t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) = T(x+dx,t) \sin \alpha(x+dx,t) - T(x,t) \sin \alpha(x,t) \end{cases}$$

Or, au premier ordre en α :

$$\begin{cases} \cos \alpha \simeq 1 \\ \sin \alpha(x,t) \simeq \alpha(x,t) \simeq \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \end{cases}$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$\begin{cases} T(x+dx,t) = T(x,t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) = T(x+dx,t) \frac{\partial h}{\partial x}(x+dx,t) - T(x,t) \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \end{cases}$$

La première équation implique que la tension de la corde est uniforme : $T(x,t) = T_0$

La deuxième s'écrit alors : $\mu dx \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right)$

$$dm \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) dx$$

L'équation du mouvement de la corde est alors : $\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$

La vitesse des ondes est $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et l'équation de propagation est $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = 0$

38. • On considère une onde progressive harmonique : $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$

En utilisant l'équation de D'ALEMBERT : $k = \frac{\omega}{c}$

• L'impédance de la ligne est $Z = \frac{-\vec{T}(x,t) \cdot \vec{e}_y}{\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)}$. Donc $Z = -T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)}$

On considère une onde progressive dans le sens des x croissant : $y(x,t) = f(x - ct)$.

Donc $\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = f'(x - ct) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -cf'(x - ct) \end{cases}$.

L'impédance est alors $Z = \frac{T_0}{c}$. $Z = \sqrt{\mu T_0}$

- Le cas $k > 0$ correspond aux ondes progressives dans le sens des x croissant, le cas $k < 0$ à celui des ondes progressives dans le sens des x décroissants.

39. Les vitesses de phase et de groupe sont : $\begin{cases} v_\varphi = c \\ v_g = c \end{cases}$

La vitesse de phase est la vitesse des ondes progressives harmoniques. La vitesse de groupe est la vitesse de déplacement de l'enveloppe des paquets d'onde.

40. L'onde incidente est $\underline{y}_i(x, t) = \underline{Y}_i e^{j(\omega t - kx)}$. L'onde réfléchie est $\underline{y}_r(x, t) = \underline{Y}_r e^{j(\omega t + kx)}$

Le système étudié est linéaire, donc l'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente.

41. L'onde résultante est $\underline{y}(x, t) = \underline{y}_i(x, t) + \underline{y}_r(x, t)$.

Donc $\underline{y}(x, t) = (\underline{Y}_i e^{-jkx} + \underline{Y}_r e^{jkx}) e^{j\omega t}$.

En utilisant le coefficient de réflexion : $\underline{y}(x, t) = \underline{Y}_i (e^{-jkx} + \rho e^{jkx}) e^{j\omega t}$.

La corde est fixée en $x = 0$, donc $\underline{y}(0, t) = 0$. Donc $\underline{\rho} = -1$

L'onde résultante est alors : $\underline{y}(x, t) = \underline{Y}_i (e^{-jkx} - e^{jkx}) e^{j\omega t}$.

Donc $\underline{y}(x, t) = -2j\underline{Y}_i \sin(kx) e^{j\omega t}$. L'onde résultante est stationnaire.

B.I.A Analyse énergétique

42. En utilisant la notation définie à la question 44 : la puissance que le morceau de corde en $x > x_0$ transmet au morceau $x < x_0$ est : $P(x_0, t) = \vec{T}(x_0, t) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t}(x_0, t) \vec{e}_y \right)$

Donc $P(x, t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$.

Le théorème de la puissance cinétique appliqué à la tranche de corde entre x et $x + dx$ s'écrit :

$$\frac{\partial e_c(x, t)}{\partial t} dx = P(x + dx, t) - P(x, t) + p_i(x, t) dx$$

Donc $\frac{\partial e_c(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + p_i(x, t)$

La puissance linéique est alors : $p_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right) - T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right)$

Ce qui se développe en : $p_i = \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$

En utilisant l'équation de D'ALEMBERT : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

La puissance linéique se simplifie en : $p_i = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$

43. La puissance linéique intérieure et l'énergie potentielle linéique associée sont liées par : $\frac{\partial e_p}{\partial t} = -p_i$

Donc : $\frac{\partial e_p}{\partial t} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$

D'où : $\frac{\partial e_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$

En choisissant la constante d'intégration nulle : $e_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$

44. • En reprenant la démonstration de 42 : $\frac{\partial e_c(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + p_i(x, t)$

Or $p_i = -\frac{\partial e_p}{\partial t}$, donc $\frac{\partial (e_c + e_p)}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}$

• Le signe est différent de celui proposé dans l'énoncé : $P(x_0, t)$ représente la puissance transférée dans le sens des x décroissants. Si l'on veut définir un équivalent du vecteur de Poynting en électromagnétisme, il faut utiliser un vecteur $\vec{\Pi}(x, t) = -P(x, t) \vec{e}_x$.

Dans ce cas, le bilan énergétique s'écrit $\frac{\partial (e_c + e_p)}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$

- Ce bilan énergétique correspond à un milieu sans perte, il n'y a de terme équivalent à la puissance échangée avec les charges mobiles ($\vec{j} \cdot \vec{E}$) de l'égalité de POYNTING.
- Dans le modèle mécanique utilisé pour décrire la corde, il n'y a aucune force dissipative. On a négligé les forces de frottement de l'air par exemple. Il est donc normal de trouver un bilan qui traduise la conservation de l'énergie mécanique de la corde.

45. • Que signifie «retour réel» ?

- On considère l'onde étudiée en 41, et en prenant la phase à l'origine des temps nulle pour l'onde incidente : $\underline{Y}_i = Y_i$.

Alors $y(x, t) = 2Y_i \sin(kx) \sin(\omega t)$ et la puissance linéique est : $P(x, t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$

Donc $P(x, t) = 4Y_i^2 k \omega \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t)$

Donc $P(x, t) = Y_i^2 k \omega \sin(2kx) \sin(2\omega t)$

- La valeur moyenne de cette puissance est $\langle P \rangle = 0$

- Les points où $P(x, t) = 0$ sont telles que $\sin(2kx) = 0$.

Donc, ces points peuvent être repérés par leur abscisse x_p telles que $2kx_p = p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$.

Donc $x_p = \frac{p\pi}{2k}$, soit $x_p = \frac{p\lambda}{4}$.

La distance entre deux points voisins où $P = 0$ est $\frac{\lambda}{4}$.

B.II Section de la ligne

46. On note R la résistance d'un conducteur ohmique. Alors : $\left\{ \begin{array}{l} [\Lambda dx \omega] = [R] \\ \left[\frac{1}{\Gamma dx \omega} \right] = [R] \end{array} \right.$

Donc : $\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\Lambda}{\Gamma} \right] = [R^2] \\ [\Lambda \Gamma (dx \omega)^2] = 1 \end{array} \right.$. Et $\left\{ \begin{array}{l} \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \right] = [R] \\ \left[\frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \right] = LT^{-1} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \text{ est une impédance.} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \text{ est une vitesse.} \end{array} \right.$

47. Le tableau des grandeurs analogues :

	Corde		Ligne	
énergie cinétique linéique	$e_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$	\rightsquigarrow	$e_m = \frac{1}{2} \Lambda i^2$	énergie magnétique linéique
énergie potentielle linéique	$e_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$ $e_p = \frac{1}{2T_0} \left(T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$	\rightsquigarrow	$e_e = \frac{1}{2} \Gamma u^2$	énergie électrique linéique
vitesse des ondes	$c' = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	\rightsquigarrow	$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$	vitesse des ondes
tension de la corde	T_0	\rightsquigarrow	$\frac{1}{\Gamma}$	inverse de la capacité linéique
masse linéique	μ	\rightsquigarrow	Λ	inductance linéique
vitesse de la corde	$\frac{\partial y}{\partial t}$	\rightsquigarrow	i	intensité
force selon \vec{e}_y	$T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$	\rightsquigarrow	u	tension (électrique)
angle avec l'axe Ox	$\frac{\partial y}{\partial x}$	\rightsquigarrow	$u \Gamma$	charge linéique
puissance linéique	$P = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$	\rightsquigarrow	$P' = ui$	puissance linéique
«vecteur de POYNTING»	$\vec{\Pi} = -P \vec{e}_x$	\rightsquigarrow	$\vec{\Pi}' = -P' \vec{e}_x$	«vecteur de POYNTING»

48. L'énoncé donne $\frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_i} e^{2jkx} = \frac{Z_D - Z_C}{Z_D + Z_C} e^{2jk(x-d)}$.

Si il n'y a pas de réflexion, $\underline{U}_r = 0$ et donc $\underline{Z}_D = \underline{Z}_C$

On retrouve la condition classique d'adaptation d'impédance.

49. La coupure en $x = a$ se traduit par $\begin{cases} a = d \\ \underline{Z}_D \rightarrow +\infty \end{cases}$.

La présence du générateur en début de ligne impose $\underline{U}(0) = U_0 \sqrt{2}$.

En utilisant la formule donnée par l'énoncé : $\frac{\underline{U}(0)}{\underline{I}(0)} = \frac{Z_C}{j \tan(ka)}$.

Donc $\underline{I}(0) = \frac{U_0 \sqrt{2}}{Z_C} j \tan(ka)$

Les amplitudes des tensions sont telles que : $\begin{cases} \underline{U}(0) = \underline{U}_i + \underline{U}_r \\ \underline{U}(a) = \underline{U}_i e^{-jka} + \underline{U}_r e^{jka} \\ \underline{U}_r = \underline{U}_i e^{-2jka} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}(0) = \underline{U}_i (1 + e^{-2jka}) \\ \underline{U}(a) = 2 \underline{U}_i e^{-jka} \end{cases}$

Donc $\underline{U}(a) = \underline{U}(0) \frac{2}{e^{-jka} + e^{-jka}} = \frac{\underline{U}(0)}{\cos(ka)}$. D'où : $\underline{U}(a) = \frac{U_0 \sqrt{2}}{\cos(ka)}$

50. Si $a = \frac{\lambda}{4}$ alors $ka = \frac{\pi}{2}$. On constate que l'amplitude de la tension en $x = a$ et celle de l'intensité en $x = 0$ divergent.

Un phénomène de résonance se produit sur la ligne.