

Deux problèmes indépendants

Problème n° 1 – Étude d'un dispositif de protection contre les surintensités

1 Équations de fonctionnement

1. Il faut que les dimensions sur Oy et sur Oz soient grandes devant celle sur Ox : $d_y \gg 2a$ et $d_z \gg 2a$. On peut noter que sur les indications de la photographie fournie pour le fusible, on a $2a = 4,1$ mm alors que $d_y = 11,5$ mm et $d_z = 20,1$ mm. Les conditions ne sont pas tout à fait réunies même si l'épaisseur est inférieure aux deux autres dimensions.

2. Le générateur utilisé est un générateur de tension continue qui délivre une tension constante au cours du temps. Cela signifie que l'on se trouve en régime indépendant du temps, l'intensité est la même partout. Si cela n'était pas le cas, il y aurait des phénomènes d'accumulation ou de diminution de charges localement. Si \vec{J} est le vecteur densité de courant, on a $\text{div } \vec{J} = 0$. La section étant constante, on a $I = \vec{J} \cdot \vec{S} = JS$.

3. Le milieu étudié est homogène et les conditions aux limites en $x = \pm a$ sont les mêmes : $T(x = \pm a) = T_e$. Le plan Oyz en $x = 0$ est donc un plan de symétrie $[Oyz = \Pi^+ \text{ pour } T(x)]$. La température est donc une fonction paire en x . Pour le champ électrique, on a par la loi d'OHM $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Puisque nous avons montré que \vec{J} était uniforme, cela signifie que le champ électrique \vec{E} est aussi uniforme et indépendant de x . Le plan Oyz est donc un plan d'antisymétrie pour le champ électrique : $[Oyz = \Pi^- \text{ pour } \vec{E}]$.

4. On effectue un bilan énergétique en puissance pour une tranche comprise entre x et $x + dx$. Sa capacité thermique est $cSdx$ car on nous donne la capacité thermique volumique. Le bilan se traduit par l'équation $cSdx \frac{\partial T}{\partial t} = P_{\text{entre}} - P_{\text{sort}} + P_{\text{créée in situ}}$. Le terme de création va traduire la puissance dissipée par effet JOULE. La puissance volumique étant $\frac{J^2}{\sigma}$, on a $P_{\text{créée in situ}} = \frac{J^2}{\sigma} Sdx$. Les puissances entrante et sortante correspondent à la conduction et obéissent à la loi de FOURIER. On a donc : $cSdx \frac{\partial T}{\partial t} = j_{\text{cond}}(x, t)S - j_{\text{cond}}(x + dx, t)S + \frac{J^2}{\sigma} Sdx$. On obtient après division par Sdx , l'équation qui traduit le bilan locale d'énergie écrit en puissance volumique : $c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\text{cond}}(x, t)}{\partial x} + \frac{J^2}{\sigma}$. Comme nous sommes dans un modèle unidimensionnel, la loi de FOURIER nous permet d'écrire que $j_{\text{cond}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$. L'équation différentielle d'évolution de la température est donc : $c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{J^2}{\sigma}$.

5. Pour le dipôle étudié, on a $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ d'où une tension à ses bornes qui se calcule selon $U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ce qui se réécrit $U = \int_A^B \frac{J}{\sigma} \cdot dx \vec{e}_x$. Or, nous savons que la densité de courant est uniforme et orientée selon \vec{e}_x donc $U = \int_A^B \frac{J}{\sigma} dx$. J est indépendant de x mais par contre σ dépend de T qui dépend de x . La conductivité est fonction de x . Cela permet d'exprimer la tension selon $U = J \int_{-a}^a \frac{dx}{\sigma}$. Comme l'intensité électrique est reliée à la densité de courant par $I = JS$, on en déduit que $U = \frac{I}{S} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sigma}$. On peut donc en déduire l'expression de la résistance électrique : $R = \frac{1}{S} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sigma}$.

6. La convention utilisée pour la description du générateur est de type générateur. On obtient facilement $U = U_G - R_G I$.

7. La tension U aux bornes du dipôle est encore $U = RI$. À partir de cette expression et de celle de la question précédente, on trouve que $I = \frac{U_G}{R+R_G}$. La densité volumique de courant est alors : $J = \frac{1}{S} \frac{U_G}{R+R_G}$.

2 Étude du régime stationnaire

8. On se place en régime indépendant du temps : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Le bilan énergétique permet d'écrire que $\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{J^2}{\sigma(T)}$ avec $T = T(x)$. Pour passer à une équation en puissance, il faut intégrer sur le volume : $\int_{-a}^a \lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} dx = -\int_{-a}^a S \frac{J^2}{\sigma} dx$. On peut sortir les grandeurs constantes de ces intégrales pour arriver à $S \lambda \int_{-a}^a \frac{d^2 T}{dx^2} dx = -J^2 S \int_{-a}^a \frac{dx}{\sigma(T)}$. Pour une portion de longueur dx , la résistance électrique est $dR = \frac{dx}{\sigma S}$. La puissance dissipée par effet JOULE est $dP_{\text{elec}} = \frac{dx}{\sigma S} I^2 = J^2 S \frac{dx}{\sigma}$. Pour l'ensemble du dipôle, on a $P_{\text{elec}} = J^2 S \int_{-a}^a \frac{dx}{\sigma}$. En régime permanent, la puissance dégagée par effet JOULE doit nécessairement être évacuée en $x = -a$ et en $x = a$. On a $P_{\text{elec}} = -S \lambda \int_{-a}^a \frac{d^2 T}{dx^2} dx = S \left[-\lambda \frac{dT}{dx} \right]_{-a}^a = S(j_{\text{cond}}(a) - j_{\text{cond}}(-a))$. On peut donc conclure qu'en régime indépendant du temps, on a $P_{\text{elec}} = S(j_{\text{cond}}(a) - j_{\text{cond}}(-a))$.

9. Si l'on se place avec une conductivité σ_e indépendante de la température, le bilan de puissance local permet d'écrire $\frac{J^2}{\sigma_e} = \lambda \left| \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_{T_e}$. On peut évaluer cette dérivée seconde en écrivant que $\left| \frac{d^2 T}{dx^2} \right| \equiv \frac{T_e}{a^2}$. Or $K = \frac{J^2}{\sigma_e} \frac{1}{\lambda T_e}$. Grâce à l'expression précédente, on peut voir que K permet de comparer la puissance électrique et la puissance évacuée par conduction thermique. K est un nombre sans dimension comme on en trouve pas mal en Physique pour comparer 2 termes qui figurent dans une équation.

10. L'expression de la résistance électrique est $R = \frac{1}{S} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sigma(T)} = \frac{2}{S} \int_0^a \frac{a dX}{\sigma_e(1+\varepsilon Y)}$ par parité de la fonction température par rapport à $x = 0$. On peut effectuer un développement limité de $\frac{1}{1+\varepsilon Y} \simeq 1 - \varepsilon Y$. On arrive alors bien à l'équation proposée par l'énoncé : $R = \frac{2a}{\sigma_e S} \int_0^1 (1 - \varepsilon Y) dX$. Pour l'équation différentielle donnant l'évolution de la température, on démontre facilement que $\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 T}{dX^2}$ et puis que $\frac{d^2 T}{dX^2} = T_e \frac{d^2 Y}{dX^2}$. De plus $\frac{J^2}{\sigma} = \frac{J^2}{\sigma_e(1+\varepsilon Y)} = \frac{J^2}{\sigma_e} (1 - \varepsilon Y)$. On obtient là aussi l'équation différentielle proposée par l'énoncé :

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} - K\varepsilon Y = -K.$$

11. On utilise l'expression précédente de la résistance et la linéarité de l'intégrale : $R = \frac{2a}{S\sigma_e} (\int_0^1 dX - \varepsilon \int_0^1 Y(X) dX)$. La première intégrale correspond à la résistance R_0 . Son expression est : $R_0 = \frac{2a}{\sigma_e S}$. Par identification avec l'expression fournie pour la résistance R , on peut écrire que $R_1 = R_0 \int_0^1 Y(X) dX$. Or, on nous propose l'expression de $Y(X) = Y_0(X) + \varepsilon Y_1(X)$. Pour l'expression de R_1 , nous ne garderons que le terme dominant à savoir $Y_0(X)$ puisque la contribution de R_1 correspond déjà un ordre 1 en ε . On conclut donc avec l'expression : $R_1 = R_0 \int_0^1 Y_0(X) dX$.

12. L'indice 0 correspond à $\sigma = \sigma_e$. On a donc $K_0 = \frac{J_0^2 a^2}{\lambda T_e \sigma_e} = \frac{J_0^2 a^2}{S^2 \lambda T_e \sigma_e}$ où l'intensité du courant est donnée par $I_0 = \frac{U_G}{R_0 + R_G}$. Pour la situation quelconque, on a une intensité I telle que $I = \frac{U_G}{R+R_G} = I_0 \frac{R_0 + R_G}{R_0 + R_G - \varepsilon R_1}$. On peut apparaître faire un terme petit devant 1 par factorisation $I = I_0 \frac{1}{1 - \varepsilon \frac{R_1}{R_0 + R_G}}$. En utilisant toujours un développement limité au premier ordre, on obtient $I = I_0 (1 + \varepsilon \frac{R_1}{R_0 + R_G})$ que l'on passe aisément au carré $I^2 = I_0^2 (1 + 2\varepsilon \frac{R_1}{R_0 + R_G})$. Cela permet d'écrire une nouvelle expression de K : $K = \frac{I_0^2 a^2}{S^2 \lambda T_e \sigma_e} (1 + 2\varepsilon \frac{R_1}{R_0 + R_G}) = K_0 (1 + 2\varepsilon \frac{R_1}{R_0 + R_G})$. On obtient ainsi l'expression de K_1 selon : $K_1 = K_0 \frac{2R_1}{R_0 + R_G}$.

13. L'équation différentielle devient $\frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{d^2 Y_0}{dX^2} + \varepsilon \frac{d^2 Y_1}{dX^2} - \varepsilon (K_0 + \varepsilon K_1) (Y_0 + \varepsilon Y_1) = -(K_0 + \varepsilon K_1)$. Dans le développement des calculs, on ne garde que le terme d'ordre 0 et celui d'ordre 1 en ε . On obtient alors $\frac{d^2 Y_0}{dX^2} + \varepsilon \frac{d^2 Y_1}{dX^2} - \varepsilon K_0 Y_0 = -K_0 - \varepsilon K_1$. Cette équation doit être vraie $\forall \varepsilon$, on peut donc en déduire le système différentiel attendu par l'énoncé à savoir : $\frac{d^2 Y_0}{dX^2} = -K_0$ et $\frac{d^2 Y_1}{dX^2} = K_0 Y_0(X) - K_1$.

14. La première des deux équations différentielles s'intègre facilement et on obtient pour $Y_0(X)$ une forme parabolique. Il n'est donc pas étonnant que dans l'expression proposée par l'énoncé pour $Y(X)$, on trouve un premier terme en $\frac{K_0}{2}(1 - X^2)$. Un générateur idéal de tension fournit une tension U indépendante de l'intensité I délivrée. Or, on a vu que $U = U_G - R_G I$. Pour obtenir $U = U_G \forall I$, on doit donc prendre $R_G = 0$. On en déduit que $\Delta_U = 3$. Un générateur de courant délivre une intensité indépendante de la tension aux bornes du générateur. Le générateur de courant réel est constitué d'un générateur de courant idéal fournissant l'intensité I_G avec une résistance R_G placée en parallèle du générateur idéal de courant. On peut dire que la situation est duale par rapport au générateur de tension. La loi des nœuds en sortie du générateur de courant impose que $I = I_G - \frac{U}{R_G}$. Pour avoir $I = I_G \forall U$, on doit avoir $R_G \rightarrow \infty$. On en déduit que $\Delta_I = -5$.

15. La caractéristique du générateur est $U = U_G - R_G I$ et celle de la résistance $U = RI$. Si $\varepsilon > 0$ alors cela signifie que lorsque R diminue, l'intensité du courant augmente comme on peut le voir sur le schéma de la figure 1 où on observe que $I_P > I_0$.

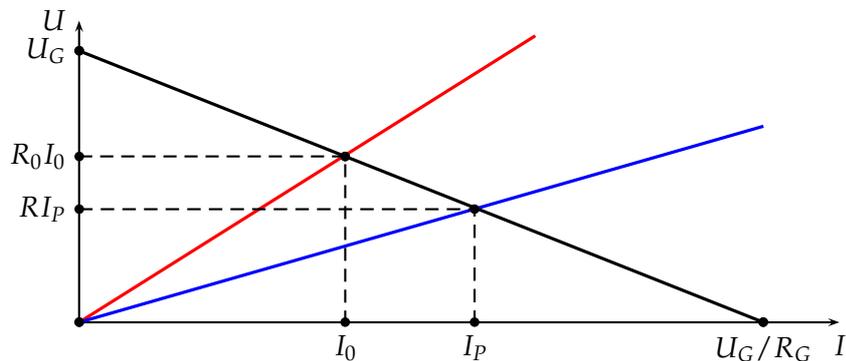


FIGURE 1 - Point de fonctionnement

16. L'expression que l'on nous donne de $Y(X)$ peut se réécrire selon : $Y(X) = Y_0(X)(1 + \varepsilon \frac{K_0}{12}(\Delta + X^2))$. Comme on a $K_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ et du fait que $Y_0(X) = \frac{1}{2}K_0(1 - X^2)$ est positif, on voit que la position de $Y(X)$ par rapport à $Y_0(X)$ est fixée par la valeur de Δ . En effet, tout se joue dans le facteur $(\Delta + X^2)$ sachant que $X \in [-1; 1]$. Pour le générateur de tension $\Delta = 3$, on a donc $(3 + X^2) > 0$ et donc $Y_U(X) > Y_0(X)$. Pour le générateur de courant, on a $\Delta = -5$. Par conséquent, on a toujours $(-5 + X^2) < 0$ et donc $Y_I(X) < Y_0(X)$. La représentation est proposée sur la figure 2.

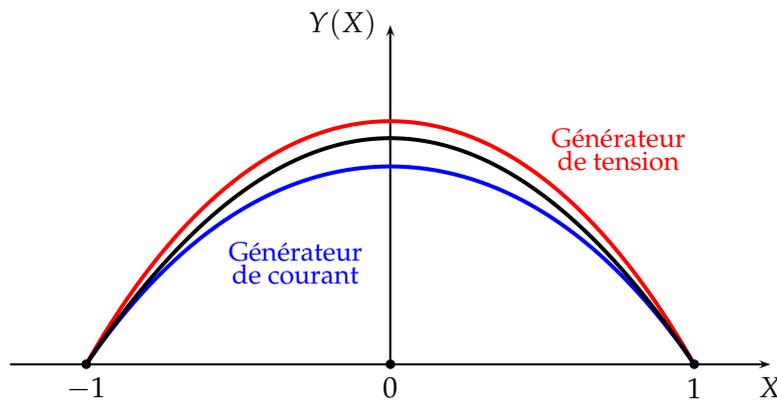
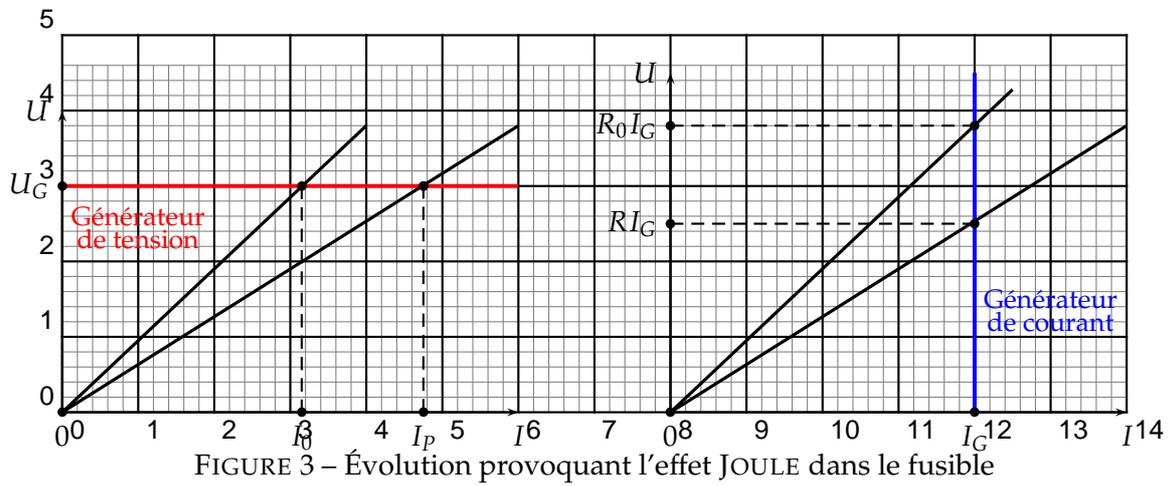


FIGURE 2 - Évolution de l'écart relatif de température par rapport à la température ambiante dans le fusible

On peut comprendre ces résultats en analysant l'évolution du point de fonctionnement dans les deux graphiques présentant les caractéristiques du générateur idéal de tension et du générateur idéal de courant. On voit bien que si R diminue le courant augmente dans le cas du générateur de tension alors que la tension diminue dans le cas du générateur idéal de courant, voir la figure 3. Dans le cas du générateur de tension, la puissance augmente alors que pour le générateur de courant, elle diminue.



3 Analyse de la stabilité du point de fonctionnement

17. On effectue le bilan d'énergie pour le fusible en totalité, l'écriture sera réalisée en puissance. On a $cS2a \frac{dT}{dt} = C \frac{dT}{dt} = RI^2 - 2hS(T - T_e)$ puisque qu'il y a de la puissance créée in situ par effet JOULE et des pertes de puissances par convection sur chacune des deux faces du fusible. L'équation différentielle peut encore s'écrire : $C \frac{dT}{dt} + 2hS(T - T_e) = R(T)I^2$.

18. On pose $T = T^* + \theta$ et par conséquent $\frac{dT}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$. On a aussi $T - T_e = T^* - T_e + \theta$. On va effectuer un développement limité de la résistance autour de sa valeur en régime stationnaire. On écrit que $R = R^* + \left. \frac{dR}{dT} \right|_{T^*} (T - T^*)$. Or, d'après la loi d'évolution de la résistance avec la température, on peut écrire que $\left. \frac{dR}{dT} \right|_{T^*} = \alpha^* R^*$. Par conséquent, le développement limité de la résistance s'écrit $R(T) = R^* + \alpha^* R^* (T - T^*) = R^* (1 + \alpha^* \theta)$. On peut donc donner une expression approchée de la puissance JOULE : $R(T)I^2 = R^* (1 + \alpha^* \theta) I^2$. Nous allons continuer à faire un calcul approché pour l'intensité I . Nous savons que $U_G = (R_G + R)I$ mais aussi que $U_G = (R_G + R^*)I^*$. Cela permet d'en déduire que $I = \frac{I^*}{1 + \alpha^* \frac{R^*}{R_G + R^*}}$. Par développement

limité, on arrive à $I = I^* (1 - \frac{\alpha^* R^* \theta}{R_G + R^*})$. On passe au carré toujours en développement limité : $I^2 = I^{*2} (1 - \frac{2\alpha^* R^* \theta}{R_G + R^*})$. Dans ces conditions, l'équation différentielle devient $C \frac{d\theta}{dt} + 2hS(T^* - T_e) + 2hS\theta = R^* I^{*2} (1 + \alpha^* \theta) (1 - \frac{2\alpha^* R^* \theta}{R_G + R^*})$. En ne gardant que les termes du premier ordre en θ , on obtient l'équation $C \frac{d\theta}{dt} + 2hS(T^* - T_e) + 2hS\theta = R^* I^{*2} (1 + \alpha^* \theta \frac{R_G - R^*}{R_G + R^*})$. Lorsque l'on est en régime stationnaire, on a $\theta = 0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Cela nous donne l'équation reliant les paramètres de l'état stationnaire : $2hS(T^* - T_e) = R^* I^{*2}$. En simplifiant l'équation différentielle grâce à la relation précédente, on arrive à l'équation différentielle : $C \frac{d\theta}{dt} = -[2hS + \frac{R^* - R_G}{R^* + R_G} \alpha^* R^* I^{*2}] \theta$ comme prévu dans l'énoncé.

19. Il y aura stabilité du système si θ ne diverge pas au cours du temps, cela impose que la constante $k = \frac{1}{C} [2hS + \frac{R^* - R_G}{R^* + R_G} \alpha^* R^* I^{*2}]$ soit positive. Cela revient à imposer la condition $\alpha^* (R^* - R_G) > -\frac{2hS(R^* + R_G)}{R^* I^{*2}}$.

20. Dans le cas où le générateur est idéal de tension, on a $R_G = 0$. On a $k = \frac{1}{C} [2hS + \alpha^* R^* I^{*2}]$. Assez souvent, on aura une situation où $\alpha^* > 0$, il y aura toujours stabilité puisqu'alors $k > 0$ mais, sans restreindre la généralité, on aura stabilité lorsque $\alpha^* > -\frac{2hS}{R^* I^{*2}}$. Pour un générateur idéal de courant, on a $R_G \rightarrow \infty$.

Le coefficient k devient $k = \frac{1}{C} [2hS - \alpha^* R^* I^{*2}]$. Il faut avoir $\alpha^* < \frac{2hS}{R^* I^{*2}}$ pour pouvoir assurer la stabilité.

21. On repart de l'équation différentielle de départ en la divisant par $2hS$. On obtient alors $\frac{ca}{h} \frac{dT}{dt} = -(T - T_e) + \frac{R(T)I^2}{2hS}$. Or, l'intensité est donnée par $I = \frac{U_G}{R(T) + R_G} = \frac{U_G}{R_G} \frac{1}{1+r}$. En passant cette expression de l'intensité au carré et en utilisant le fait que $r = R(T)/R_G$, on arrive à la forme d'équation différentielle voulue par l'énoncé à savoir $\frac{ca}{h} \frac{dT}{dt} = \frac{U_G^2}{R_G} \frac{1}{2hS} \frac{r}{(1+r)^2} - (T - T_e)$. On peut donc identifier à la fois l'expression de la constante $A = \frac{U_G^2}{R_G} \frac{1}{2hS}$ et celle, plus importante pour la suite, de la fonction : $f(r) = \frac{r}{(1+r)^2}$. On vérifie au passage que l'on a bien $f(r=1) = \frac{1}{4}$ comme souhaité.

22. On calcule la dérivée de $f(r)$, on a $\frac{df}{dr} = \frac{1-r}{(1+r)^3}$ après simplification dans le calcul. Cette fonction

présente un maximum en $r = 1$ de valeur $\frac{1}{4}$, voir la représentation graphique de la figure 4. Lorsque l'on est à la température ambiante, on a $r = r_e = R_e/R_G$. Avec $\alpha > 0$, la résistance ne fait qu'augmenter avec la température. Si $R_e < R_G$, la résistance comme par augmenter et alors $f(r)$ augmente mais ensuite passé la valeur R_G , $f(r)$ diminuera et si $R_e > R_G$ alors immédiatement on est dans la zone où $f(r)$ diminue lorsque R augmente et donc lorsque T augmente. Dans ces conditions le signe de $\frac{dT}{dT}$ ne fera pas qu'augmenter car on va se retrouver, dans l'équation différentielle, avec le terme de $f(r)$ qui diminue alors que dans le même temps celui de $(T - T_e)$ augmente. La température ne peut pas diverger.

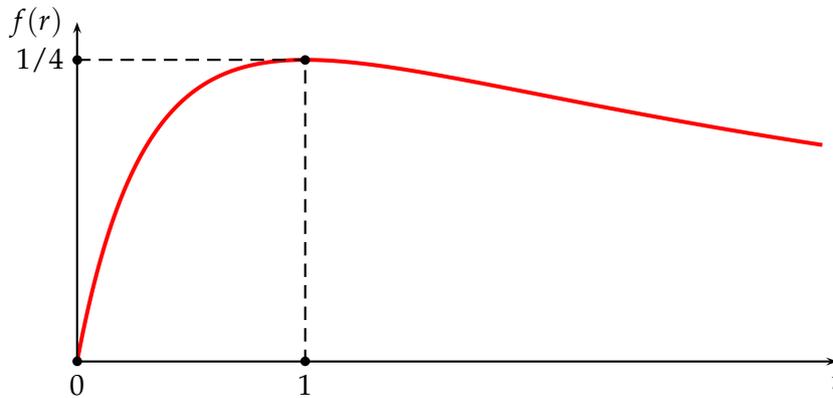


FIGURE 4 – Représentation graphique de $f(r)$

23. Si la résistance augmente, alors l'intensité diminue et comme elle intervient au carré dans la puissance $R(T)I_p^2$, cette diminution prend le pas sur l'augmentation de la résistance $R(T)$. Pour rappel, la puissance maximale transférée à la charge de la part d'un générateur de résistance interne R_G correspond à une résistance d'utilisation $R = R_G$. On est dans le cas de l'adaptation d'impédance.

24. D'après la loi d'évolution de la résistance, on a $\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dT}$. Comme α est supposé constant, l'équation différentielle s'intègre facilement puisque l'on peut écrire $\alpha dT = \frac{dr}{r}$. Cela donne $\alpha T = \ln r + \beta$ où β représente une constante d'intégration que l'on va exprimer avec la condition relative à la température ambiante $r = r_e = \frac{R_e}{R_G}$. On arrive à $\ln \frac{r}{r_e} = \alpha(T - T_e)$ ou bien $r = r_e \exp \alpha(T - T_e)$ que l'on peut aussi écrire sous la forme $T = T_e + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r}{r_e}$.

25. Pour les températures $T_e < T_1 < T_2$, on peut constater que l'on a toujours $Af(r) > (T - T_e)$. On a donc toujours pour cette gamme de température $\frac{dT}{dT} > 0$. Les différents points sont représentés sur les graphiques de la figure 5.

26. Pour la détermination de la température d'équilibre, il faut que l'on réalise $Af(r) = T - T_e$. Or, dans l'étude des températures de la question précédente, on constatait que l'on avait toujours $Af(r) > (T - T_e)$. Il fallait donc rechercher la température au-delà du maximum. Cela est réalisé sur le graphique de la figure 5.

27. r^* est caractérisé par $Af(r^*) = T^* - T_e$. On pose $\gamma = \frac{A}{T^* - T_e}$ et on obtient l'équation $(1 + r^*)^2 = \gamma r^*$. Cela conduit à l'équation différentielle $r^{*2} + (2 - \gamma)r^* + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = \gamma^2 - 4\gamma = \gamma(\gamma - 4)$. Il ne peut y avoir des solutions que pour $\gamma > 4$. Des deux solutions pour r^* , on ne retiendra que celle supérieure à 1, on obtient $r^* = \frac{\gamma - 2 + \sqrt{\gamma(\gamma - 4)}}{2}$. On doit imposer la condition $r^* > 1$. Cette équation conduit à la même condition que pour obtenir un discriminant positif, c'est-à-dire $\gamma > 4$. En reprenant l'expression de γ , cela correspond à $A < 4(T^* - T_e)$. Ce résultat pouvait être prévu puisque l'on avait montré que la valeur maximale de $f(r)$ était $\frac{1}{4}$.

28. $r_e < 1$ ou a fortiori $r_e \ll 1$ correspond à une situation où $R_e \ll R_G$. On veut que le fusible ne modifie pas la résistance totale du circuit. Si l'on mettait une résistance trop élevée, cela diminuerait l'intensité disponible pour l'utilisation.

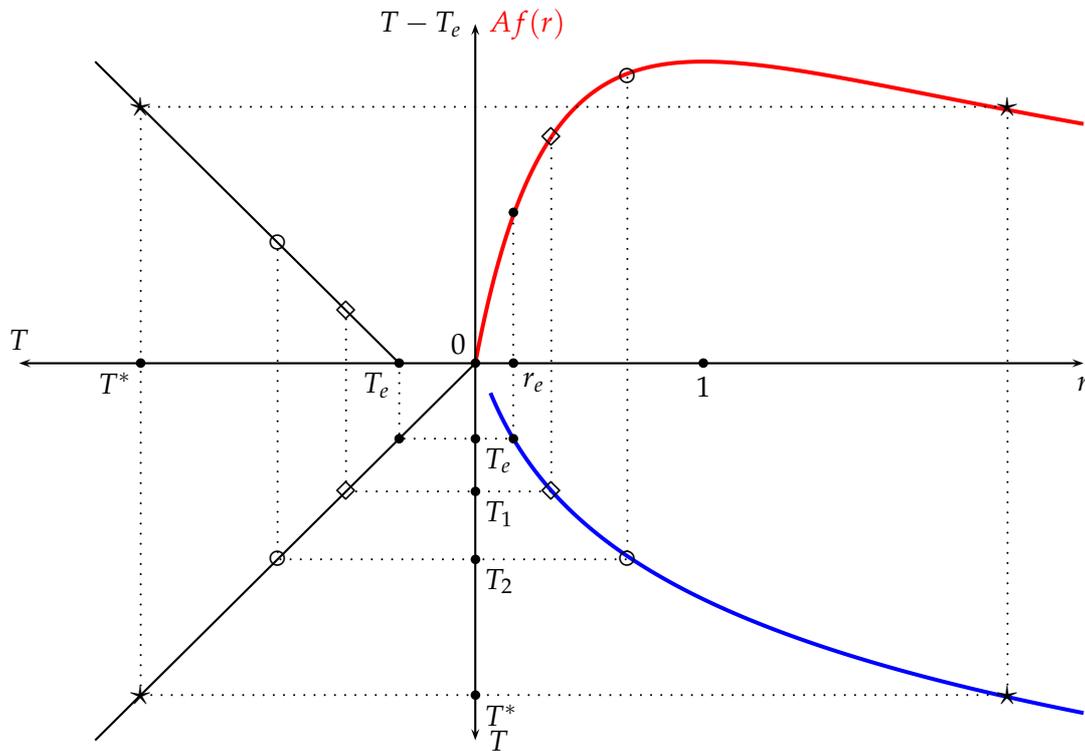


FIGURE 5 – Analyse de l'évolution de la température T par étude du signe de $\frac{ca}{h} \frac{dT}{dr}$

29. Si U_G augmente alors A augmente aussi. À partir de la situation d'équilibre, $\frac{dT}{dr} > 0$: la température augmente mais aussitôt la résistance du fusible va augmenter et cela fait diminuer la puissance dissipée par effet JOULE. Le point \star repéré sur la courbe $Af(r)$ se déplace sur la droite, cela permet d'assurer une protection contre les surintensités puisque l'on se situe dans la partie décroissante de la courbe.

Problème n° 2 – Étude du flambement, sous chargement extérieur, d'une membrane gonflée

1 Première approche du flambement

1. L'énergie potentielle associée au comportement élastique du ressort est $E_{pot} = \frac{1}{2}k(\sqrt{\ell^2 + y^2} - a)^2$. Les équilibres sont obtenus aux extrema de la fonction. On dérive et on obtient $\frac{dE_{pot}}{dy} = k(\sqrt{\ell^2 + y^2} - a) \frac{y}{\sqrt{\ell^2 + y^2}}$.

Il y a des possibilités d'équilibre en $y_1 = 0$ et éventuellement en $y_{2,3} = \pm\sqrt{a^2 - \ell^2}$, positions d'équilibre conditionnées par $\ell < a$.

2. Comme nous venons de le voir, la possibilité d'équilibre $y_{2,3} = \pm\ell\sqrt{\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 - 1}$ ne peut être obtenue que pour $\frac{a}{\ell} > 1$. On distingue deux cas très clairement en $y = 0$, soit le ressort est comprimé $\ell < a$ et la possibilité de glissement sans frottement sur l'axe Oy rend cette position d'équilibre instable comme nous le verrons à la question suivante. Il est donc logique d'obtenir des positions d'équilibre autour de la position $y_{2,3}$ qui assure au ressort la possibilité de retrouver sa longueur à vide. Au contraire si $a < \ell$ alors le ressort est étendu pour la position $y = 0$, on y trouve un équilibre stable et pas d'autres possibilités d'équilibre.

3. Pour déterminer la stabilité des équilibres par le calcul, il faut calculer $\frac{d^2E_{pot}}{dy^2}$ et valider cette dérivée aux valeurs de y correspondant à un équilibre. On trouve $\frac{d^2E_{pot}}{dy^2} = k\left[1 - \frac{a}{\sqrt{\ell^2 + y^2}} + \frac{ay^2}{(\ell^2 + y^2)^{3/2}}\right]$. On constate que

$\left.\frac{d^2E_{pot}}{dy^2}\right|_{y_1=0} = k\left(1 - \frac{a}{\ell}\right)$. On retrouve bien les deux cas envisagés avant à savoir si $a > \ell$ (ressort comprimé) alors $\left.\frac{d^2E_{pot}}{dy^2}\right|_{y_1=0} < 0$, c'est bien instable et réciproquement pour $a < \ell$ (ressort étendu) alors $\left.\frac{d^2E_{pot}}{dy^2}\right|_{y_1=0} > 0$,

la position d'équilibre est stable. Pour les deux autres positions éventuelles d'équilibre, on a forcément stabilité puisque $\left. \frac{d^2 E_{pot}}{dy^2} \right|_{y_{2,3}} = k \frac{y_{2,3}^2}{a^2} > 0$.

4. On rajoute une force $\vec{F} = F\vec{e}_y$ constante dans le problème. Cette force dérive d'une énergie potentielle $\vec{F} = F\vec{e}_y = -\vec{grad} E'_{pot} = -\frac{dE'_{pot}}{dy}\vec{e}_y$. En choisissant la constante d'équilibre nulle en $y = 0$, on peut écrire $E'_{pot} = -Fy$. La fonction énergie potentielle totale est donc : $W = \frac{1}{2}k(\sqrt{\ell^2 + y^2} - a)^2 - Fy$.

5. On utilise les variables adimensionnées proposées par l'énoncé. On a donc $W(Y) = \frac{1}{2}k\ell^2(\sqrt{1 + (\frac{y}{\ell})^2} - \frac{a}{\ell})^2 - F\ell\frac{y}{\ell}$. On peut déjà introduire Y . On a donc $W(Y) = E^*(\sqrt{1 + Y^2} - A)^2 - F\ell Y$. En divisant par E^* , on arrive à l'expression demandée : $\Psi(Y) = (\sqrt{1 + Y^2} - A)^2 - 2\alpha Y$.

6. L'allure de la courbe $\Psi(Y)$ dépend de la valeur de α . La fonction $(\sqrt{1 + Y^2} - A)^2$ présente un double puits auquel il faut ajouter une droite affine décroissante. Si la droite est peu décroissante, on aura toujours deux positions d'équilibre stable. Par contre, si la droite possède une pente nettement plus négative, il n'y aura plus qu'une seule possibilité d'équilibre du côté $y > 0$. Les graphiques sont fournis sur la figure 6.

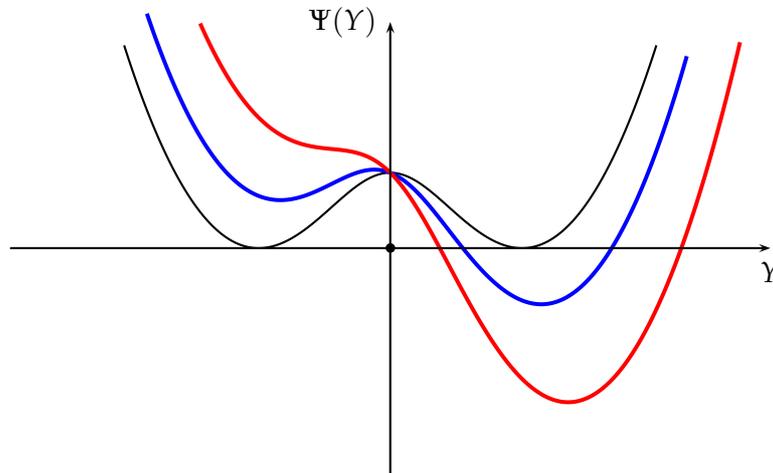


FIGURE 6 – Évolution de l'énergie potentielle adimensionnée en présence d'une force F constante

7. L'équilibre est fourni par $\frac{d\Psi}{dY} = 0$. On obtient, après calcul, la relation : $\Phi(Y) = Y(1 - \frac{A}{\sqrt{1+Y^2}}) = \alpha$.

8. On étudie les tendances de la fonction $\Phi(Y)$. Lorsque $Y \rightarrow \infty$, on peut écrire que $\sqrt{1 + Y^2} \simeq Y$. On en déduit donc que $\Phi(Y) = Y(1 - \frac{A}{Y}) = Y - A$. Pour $Y \rightarrow -\infty$, on aura (attention au signe) $\sqrt{1 + Y^2} \simeq -Y$, la fonction $\Phi(Y)$ devient alors $\Phi(Y) = Y(1 + \frac{A}{Y}) = Y + A$. Pour $Y \simeq 0$, on ne garde que le terme dominant à savoir $\sqrt{1 + Y^2} \simeq 1$, l'équation devient $\Phi(Y) = Y(1 - A)$. On prendra garde au fait que $(1 - A) < 0$ puisque la condition $A > 1$ est réalisée depuis le début de l'étude. Finalement, les tendances de la fonction $\Phi(Y)$ peuvent se résumer par l'enchaînement de 3 droites affines.

9. Sur le graphique de la figure 7, on peut voir la courbe réelle et les trois droites que nous venons de déterminer.

10. Pour résoudre le problème de détermination d'une position d'équilibre, il faut écrire $\Phi(Y) = \alpha$. Cela correspond à l'intersection entre une droite horizontale et la courbe $\Phi(Y)$. On constate donc qu'il y aura 1 ou 3 équilibre(s). On pourra se reporter à la figure 7.

11. La force élastique que subit le système est $-\frac{d\Psi}{dY} = -\Phi(Y)$. Imaginons que l'on se place à l'équilibre correspondant à α_1 et qu'une perturbation vienne augmenter la valeur de Y , c'est-à-dire mettre hors d'équilibre le système. Alors $\Phi(Y) > \alpha_1$. α représente la force F grâce à une variable adimensionnée. La force totale subie par le système est décrite par $\alpha_1 - \Phi(Y) < 0$. Elle est donc négative, le système tend à revenir à sa

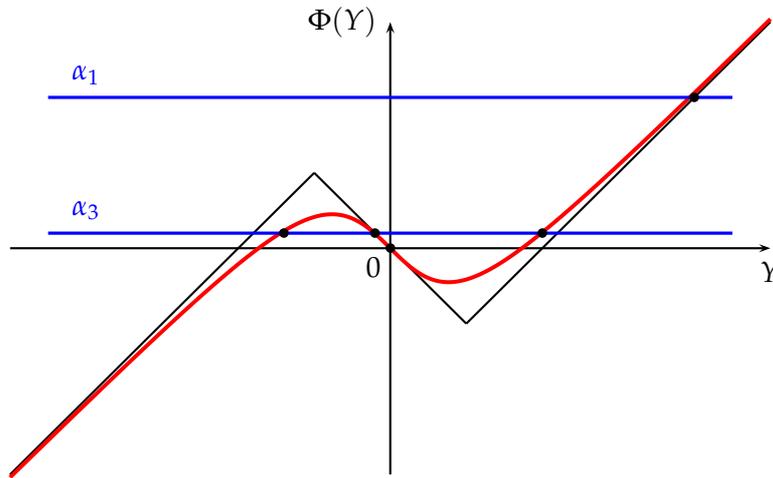


FIGURE 7 – Fonction d'équilibre $\Phi(Y)$

position d'équilibre. On peut faire le même raisonnement en imaginant que la perturbation déplace depuis l'équilibre dans l'autre sens. La force résultante sera cette fois positive puisque $\alpha_1 > \phi(Y)$. On peut généraliser facilement : à chaque fois que l'équilibre est situé sur une partie croissante de $\Phi(Y)$ alors il est stable. C'est bien sûr le contraire pour les parties décroissantes de la fonction qui donneront lieu à un équilibre instable. En conclusion, on retiendra $\boxed{\Phi(Y) \text{ décroissante} = \text{équilibre instable}}$.

12. Si l'on diminue la valeur de α depuis une valeur α_1 telle que $Y_{eq1} > 0$, on fait diminuer progressivement Y_{eq} en suivant la courbe $\Phi(Y) = \alpha$. Lorsque l'on arrive au minimum de $\Phi(y)$ et que l'on continue à diminuer α , on saute sur l'autre portion de la courbe où les équilibres sont stables. $\boxed{\text{Le saut est le flambement}}$ évoqué dans l'énoncé. On peut se reporter à la figure 8. On peut d'ailleurs noter que si l'on part d'une valeur $-\alpha_1$ et que l'on remonte vers α_1 , alors on ne suit pas toujours le même chemin, puisque l'on va monter en trouvant des positions stables jusqu'au maximum de la fonction $\Phi(Y)$ avant de sauter à droite sur la portion croissante. Le saut ne s'effectue pas au même endroit qu'à la descente. Cela est caractéristique d'un phénomène d'hystérésis.

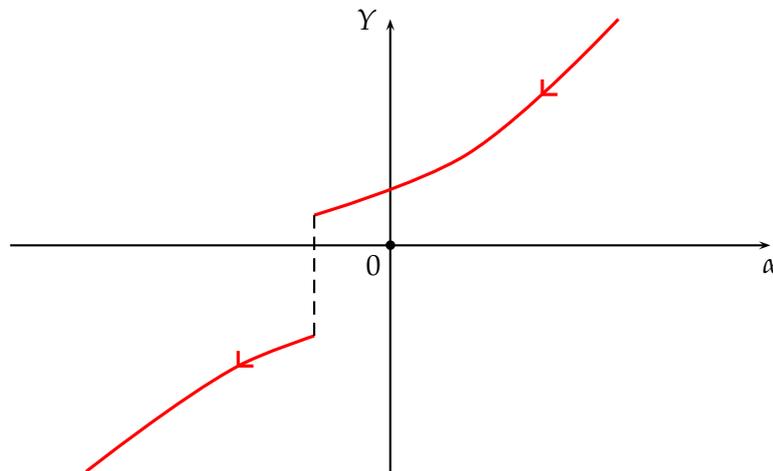


FIGURE 8 – Phénomène de flambement

2 Détermination des paramètres du modèle élastique

13. La force de pression exercée sur une surface infinitésimale est $d^2\vec{f} = PdS\vec{e}_r = PRd\epsilon dz\vec{e}_r$, où ϵ est l'angle définissant la position de la surface par rapport à l'axe Oy . Par symétrie de la structure, seule la résultante sur l'axe Oy va subsister. On s'occupe donc de la projection de la force sur cet axe : $d^2f_y = PR \cos \epsilon d\epsilon dz$. On intègre sur tous les angles possibles et on obtient la force $df_y = PRdz \int_{-\theta}^{\theta} \cos \epsilon d\epsilon = 2PR \sin \theta dz$. On utilise le fait que $\sin \theta = \frac{\ell}{R}$ pour aboutir à une force $df_y = P2\ell dz$. Ce résultat est logique puisque la

pression qui s'exerce sur la structure est uniforme, tout se passe comme si elle s'exerçait sur la surface projetée dans un plan perpendiculaire à l'axe Oy . La structure est à l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Elle subit des forces extérieures dont la résultante est nulle : $\vec{T}_0 dz + \vec{T}'_0 dz + P2\ell dz \vec{e}_y = \vec{0}$. On projette cette relation sur les axes Ox et Oy . On obtient $-T_0 \cos \theta + T'_0 \cos \theta = 0$ sur l'axe Ox , cela nous permet de dire que la tension est uniforme et que $T_0 = T'_0$. On projette maintenant sur l'axe Oy et on arrive à $-2T_0 \sin \theta + P2\ell = 0$. On en déduit que l'on a : $T_0 = T'_0 = PR$.

14. La déflexion est $R(1 - \cos \theta) = R - \sqrt{R^2 - \ell^2}$. Cela permet de construire un triangle rectangle dans lequel a intervient comme hypoténuse. On a $a^2 = \ell^2 + (R - \sqrt{R^2 - \ell^2})^2$. Après organisation du calcul, on arrive à $a = R\sqrt{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\ell^2}{R^2}}\right)^{1/2}$.

15. On commence par effectuer un développement limité de la racine à l'ordre 2, cela donne $\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{R^2}} = 1 - \frac{\ell^2}{2R^2} - \frac{\ell^4}{8R^4}$. On peut donc écrire que $a = R\sqrt{2} \left(\frac{\ell^2}{2R^2} + \frac{\ell^4}{8R^4}\right)^{1/2}$. En factorisant $\frac{\ell}{R\sqrt{2}}$, on arrive à $a = \ell \left(1 + \frac{\ell^2}{4R^2}\right)^{1/2}$. Au moyen d'un nouveau développement limité, on peut conclure sur l'expression suivante : $\frac{a}{\ell} = 1 + \frac{\ell^2}{8R^2}$.

16. On étudie une portion élémentaire de la membrane à l'équilibre et on traduit cela par le même type d'équation que celle que nous avons écrite précédemment pour l'ensemble de la structure. On a $\vec{T}(x) dz + \vec{T}(x+dx) dz - q dz dx \vec{e}_y = \vec{0}$. On projette toujours sur les axes Ox et Oy . Sur l'axe Ox , on a $-T(x) \cos \alpha(x) + T(x+dx) \cos \alpha(x+dx) = 0$. Sur l'axe Oy , on a l'influence de la charge due à la neige. Cela donne l'équation différentielle $T(x) \sin \alpha(x) - T(x+dx) \sin \alpha(x+dx) - q dx = 0$.

17. On considère uniquement les petites déformations, ce qui implique que l'angle $\alpha(x) \ll 1 \forall x$. On peut donc écrire que $\cos \alpha(x) \simeq 1$ et $\sin \alpha(x) \simeq \alpha(x)$. La projection sur l'axe Ox de l'équation vectorielle d'équilibre donne $T(x) = T(x+dx) = T_0$. La tension est uniforme et on a $T(x) = PR \forall x$.

18. En utilisant la seconde relation, on fait facilement apparaître la dérivée de α par rapport à x . On a $-T_0 \frac{d\alpha}{dx} = q$. Comme $f(x)$ est orienté vers le bas, on a $-f(x+dx) + f(x) = \alpha dx$ d'où $\frac{df}{dx} = -\alpha(x)$. Cela permet d'obtenir l'équation différentielle à laquelle obéit $f(x)$: $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{q}{T_0}$. On intègre une première fois pour obtenir $\frac{df}{dx} = \frac{q}{T_0} x + \beta$ où β est une constante d'intégration. Comme $x = 0$ est un point de symétrie pour la structure, la tension est nécessairement horizontale alors $\alpha = 0$ d'où $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = 0$. Cela permet d'écrire que $\beta = 0$. En intégrant une nouvelle fois, on arrive à $f(x) = \frac{q}{2T_0} x^2 + \gamma$. Pour déterminer la constante d'intégration γ , il faut remarquer $f(x = \pm \ell) = 0$. La déflexion est donc : $f(x) = \frac{q}{2T_0} (x^2 - \ell^2)$.

19. La déflexion est maximale en $x = 0$, on a $f_M = |f(x = 0)| = \frac{q\ell^2}{2PR}$.

20. L'équation d'équilibre est $\alpha = \frac{F}{k\ell} = Y_{eq} \left(1 - \frac{A}{\sqrt{1+Y_{eq}^2}}\right)$. Comme $Y_{eq} = \frac{f_M}{\ell}$ et que $f_M \ll \ell$, on peut écrire que $\sqrt{1+Y_{eq}^2} \simeq 1$ pour simplifier l'expression de α que l'on exprime donc selon $\alpha \simeq \frac{f_M}{\ell} \left(1 - \frac{q}{\ell}\right)$. Cela permet d'exprimer la constante de raideur correspondante : $k = \frac{qL\ell}{f_M(1-\frac{q}{\ell})} = \frac{qL\ell}{f_M} \left(1 + \frac{q}{\ell}\right)$. En utilisant les expressions démontrées avant, on arrive à $k = \frac{2PRL}{\ell} \left(2 + \frac{\ell^2}{8R^2}\right)$. Comme $\ell \ll R$, on peut se permettre de ne garder que le terme dominant et terminer le calcul par : $k = \frac{4PRL}{\ell}$.

3 Analyse du système contrôle commande du gonflement du coussin ETFE

3.1 Modèle sans groupe de pompage

21. Lorsque la hauteur $h < h_\ell$, le débit d_1 est fixé constant à la valeur $d_1 = K(h_c - h_\ell)$. Dans l'étude proposée, la hauteur d'eau est telle que $h_\ell < h(t) < h_c$, le débit est $d_1(t) = K(h_c - h)$. Par définition d'un débit volumique, on a $\frac{dV_{tot}}{dt} = d_1(t) - d_2(t)$, la variation de volume est égale à ce qui rentre moins ce qui sort.

Ici, l'écriture de cette proposition n'est acceptable que parce que l'hypothèse que l'air est incompressible est effectuée. On a donc $S \frac{dh}{dt} = K(h_c - h) - d_2(t)$. L'équation différentielle qui gère la hauteur h est : $S \frac{dh}{dt} + Kh = Kh_c - d_2(t)$. Pour les notations de LAPLACE, on adoptera le tilde pour les distinguer des grandeurs temporelles. On sait que la dérivation est équivalente à p . On a donc $(K + pS)\tilde{h} = K\tilde{h}_c - \tilde{d}_2$.

22. Le schéma fonctionnel est fourni à la figure 9, \tilde{h} est la grandeur de sortie alors que \tilde{h}_c est la consigne. En effet, on peut écrire la relation sous la forme $\tilde{h} = \frac{1}{Sp}[K(\tilde{h}_c - \tilde{h}) - \tilde{d}_2]$.

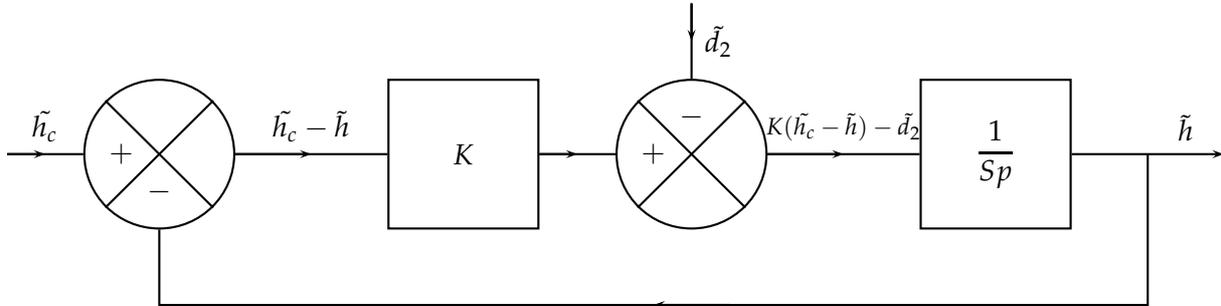


FIGURE 9 – Schéma fonctionnel sans groupe de pompage

23. Pour $t \in [0, \tau = \frac{S}{K}]$, on a $\tau \frac{dh}{dt} + h = h_c - \frac{2D}{K} = h_c - 2(h_c - h_\ell)$ que l'on écrit encore $\tau \frac{dh}{dt} + h = 2h_\ell - h_c$. La solution est $h = A \exp -\frac{t}{\tau} + 2h_\ell - h_c$. À la date $t = 0$, on a $h = h_c$. Cela nous permet de trouver $A = 2(h_c - h_\ell)$ et finalement la solution de l'équation différentielle est : $h(t) = h_c - 2(h_c - h_\ell)(1 - \exp -\frac{t}{\tau})$. Le débit de remplissage est $d_1 = K(h_c - h(t)) = 2K(h_c - h_\ell)(1 - \exp -\frac{t}{\tau})$. On peut encore l'écrire en utilisant le débit D . Cela donne $d_1 = 2D(1 - \exp -\frac{t}{\tau})$. Ce régime n'est pas valable jusqu'à la date $t = \tau$ car le débit croît et plafonne ensuite à $d_1 = D$. Cela se produit lors que $D = 2D(1 - \exp -\frac{T_1}{\tau})$. Cette équation permet de déterminer $T_1 = \tau \ln 2$. En utilisant les valeurs numériques fournies plus loin dans le sujet, on trouve que $T_1 = 700$ s car $\tau = 1000$ s. On nous fournit $h_c = 2$ m, on peut alors calculer avec les autres données $h_\ell = 1$ m. Avec l'expression de $h(t)$, on peut montrer que $h(T_1) = h_\ell = 1$ m. Pour le reste du temps jusqu'à la date $t = \tau$, l'équation différentielle à laquelle obéit la hauteur h est $S \frac{dh}{dt} = -D$. L'évolution est affine et donnée par $h(t) = h_\ell - \frac{D}{S}(t - T_1)$. On peut calculer la hauteur à la date $t = \tau$, on trouve $h(\tau) = h_\ell - \frac{D}{S}\tau(1 - \ln 2)$. On trouve numériquement $h(\tau) = 0,7$ m.

24. Pour cette phase, on a $d_2 = 0$ et donc un débit D fixé pour le remplissage au moins jusqu'à la date T_2 . On a $S \frac{dh}{dt} = D$ d'où $h(t) = \frac{D}{S}(t - \tau) + h(\tau)$, cette phase se termine lorsque $h(T_2) = h_\ell = \frac{D}{S}(T_2 - \tau) + h(\tau)$. En utilisant l'expression vue avant pour $h(\tau)$, on arrive à $T_2 = \tau(2 - \ln 2)$. Au-delà de la date $t = T_2$, on retrouve l'équation différentielle de départ à savoir $S \frac{dh}{dt} = K(h_c - h(t))$ ce qui s'écrit encore $\tau \frac{dh}{dt} + h = h_c$. En raccordant la nouvelle solution avec la précédente à la date $t = T_2$, on arrive à l'expression suivante : $h(t) = h_c - (h_c - h_\ell) \exp -\frac{t-T_2}{\tau}$.

25. L'évolution de la hauteur est fournie sur le graphique de la figure 10.

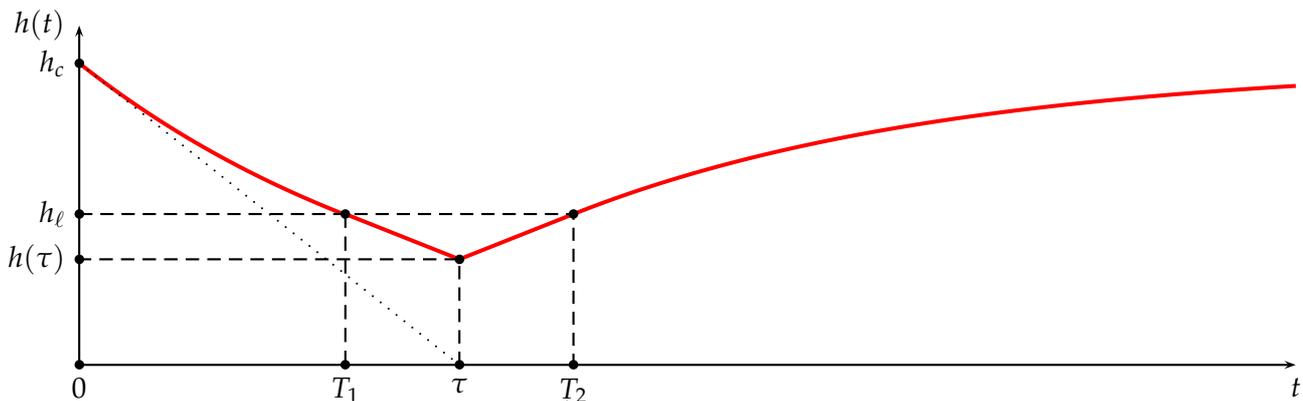


FIGURE 10 – Évolution de la hauteur de fluide

3.2 Modèle avec groupe de pompage

26. En lisant le schéma fonctionnel fourni, on peut voir que $\tilde{\theta} = -\frac{1}{Ip^2}[A(\tilde{\theta}_c - \tilde{\theta}) + fp\tilde{\theta}]$. On obtient rapidement l'expression du transfert $T(p)$: $T(p) = \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}_c} = \frac{-A}{Ip^2 + fp - A}$.

27. Le remplissage du réservoir est toujours donné par l'équation temporelle $S\frac{dh}{dt} = d_1 - d_2$ que l'on peut écrire dans le domaine de LAPLACE $Sp\tilde{h} = \tilde{d}_1 - \tilde{d}_2$. Or, nous savons que $\tilde{d}_1 = Cp\tilde{\theta}$ et comme nous venons de voir que $\tilde{\theta} = T(p)\tilde{\theta}_c$, on peut déduire que $Sp\tilde{h} = CpT(p)\frac{B}{p}(\tilde{h}_c - \tilde{h}) - \tilde{d}_2$. Comme la hauteur de consigne h_c est une constante, on peut encore écrire que $Sp\tilde{h} = Sp(\tilde{h} - \tilde{h}_c)$. On peut donc écrire que $(\tilde{h}_c - \tilde{h})[BCT(p) + Sp] = \tilde{d}_2$. On peut donc trouver le transfert $U(p)$ demandé : $U(p) = \frac{1}{BCT(p) + Sp}$.

28. Le schéma fonctionnel est réalisé à la figure 11.

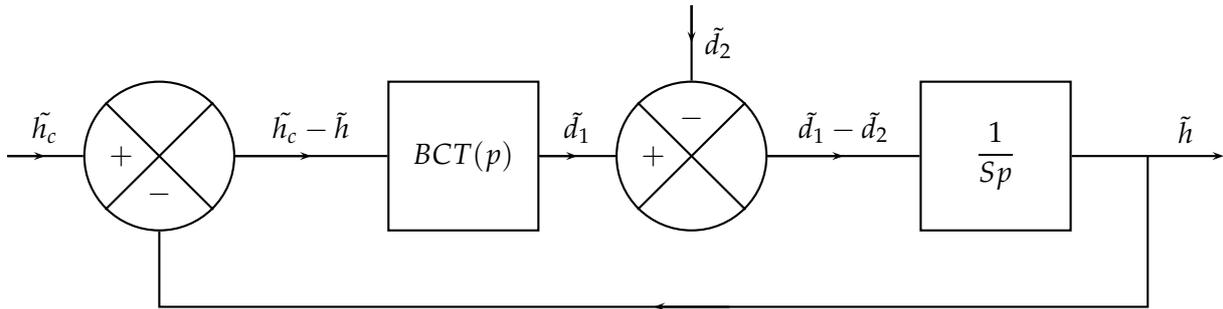


FIGURE 11 – Schéma fonctionnel avec groupe de pompage

29. Le théorème de la valeur finale nous dit que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} (p\tilde{f})$. Sachant de plus qu'un échelon de HEAVISIDE de hauteur D correspond à une grandeur de LAPLACE de $\frac{D}{p}$, on peut écrire que, pour trouver la limite demandée, il suffit de faire $p = 0$ dans l'expression de $U(p)$ que nous avons trouvée avant. Comme $T(p = 0) = 1$, on voit que $U(p = 0) = \frac{1}{BC}$. On en déduit que $\frac{h_c - h_\infty}{D} = \frac{1}{BC}$. On a donc $h_\infty = h_c - \frac{D}{BC}$.

30. Comme on peut le constater, on sera d'autant plus loin de la hauteur de consigne que le débit de la fuite sera important sauf si le produit BC est élevé. Pour assurer un retour à la valeur de consigne, il faut que $U(p = 0) = 0$. On peut proposer de donner à $\tilde{\theta}_c$ une forme de double intégrateur à la place d'une simple intégration. On aura alors $\tilde{\theta}_c = \frac{B}{p^2}(\tilde{h}_c - \tilde{h})$. Après calcul, on obtient $U(p) = \frac{p}{BCT(p) + Sp^2}$. La limite obtenue lorsque $p \rightarrow 0$ est bien nulle. On obtient alors bien $h = h_c$.