

Corrigé

Étude de quelques phénomènes naturels et environnementaux

Concours Commun I.N.P. – Épreuve de Physique Chimie – Filière PSI – Session 2021

**Première partie. Séisme.**

1 Étude du sismographe

1. On se place dans le référentiel galiléen auquel est attaché le repère (O, X, Y, Z). On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse, projeté suivant (O<sub>Z</sub>).

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (z + z_s) = -m \cdot g - \lambda \cdot \frac{dz}{dt} + k \cdot (h - z - \ell_0), \quad \blacksquare \quad (1)$$

soit :

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{dz}{dt} + k \cdot (z + \ell_0 - h) = -m \cdot \left( g + \frac{d^2 z_s}{dt^2} \right). \quad \blacksquare \quad (2)$$

En l'absence de mouvement du sol, à l'équilibre,  $dz/dt = 0$  et  $d^2z/dt^2 = 0$ , d'où :

$$k \cdot (z_{\text{éq}} + \ell_0 - h) = -m \cdot g. \quad \blacksquare \quad (3)$$

On pose  $u$  tel que  $z = z_{\text{éq}} + u$ . Alors :

$$m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot (z_{\text{éq}} + \ell_0 - h + u) = m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u - m \cdot g = -m \cdot \left( g + \frac{d^2 z_s}{dt^2} \right), \quad \blacksquare \quad (4)$$

soit finalement :

$$m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \cdot \frac{du}{dt} + k \cdot u = -m \cdot \frac{d^2 z_s}{dt^2}. \quad \blacksquare \quad (5)$$

2. On passe en notation complexe :

$$-\omega^2 \cdot m \cdot \underline{u} + j \cdot \omega \cdot \lambda \cdot \underline{u} + k \cdot \underline{u} = +\omega^2 \cdot m \cdot \underline{z_s}, \quad \blacksquare \quad (6)$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{z_s}} = \frac{\omega^2 \cdot m}{-\omega^2 \cdot m + j \cdot \omega \cdot \lambda + k}. \quad \blacksquare \quad (7)$$

On factorise par  $k$  pour obtenir la forme présentée dans l'énoncé :

$$\underline{H} = \frac{\frac{m}{k} \cdot \omega^2}{1 + j \cdot \omega \cdot \frac{\lambda}{k} - \frac{m}{k} \cdot \omega^2}. \quad \blacksquare \quad (8)$$

Il s'agit d'un filtre passé-haut du deuxième ordre.

3. Ayant  $U = |\underline{H}| \cdot Z_0$ , il vient :

$$U = \frac{\frac{m \cdot \omega^2}{k} \cdot Z_0}{\left( 1 - \frac{m \cdot \omega^2}{k} \right)^2 + \left( \frac{\lambda \cdot \omega}{k} \right)^2}. \quad \blacksquare \quad (9)$$

4. L'amplitude des déplacements de la masse reproduira celle du sol si numérateur et dénominateur s'égalisent, *i.e.* si :

$$1 \ll \frac{m \cdot \omega^2}{k} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda \cdot \omega}{k} \ll \frac{m \cdot \omega^2}{k}, \quad \blacksquare \quad (10)$$

donc si :

$$\omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega \gg \frac{\lambda}{m}. \quad \blacksquare \quad (11)$$

La deuxième relation traduit un amortissement faible, donc une suspension souple. En outre, les conditions précédentes étant remplies, on a  $\underline{H} \sim -1$ , donc les signaux sont en opposition de phase.

5. D'après les courbes d'amplitude données dans l'énoncé, il n'y a pas résonance lorsque  $\sigma \gtrsim 0,6$ . Par identification avec la relation (8),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2 \cdot \sigma \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \cdot \frac{\lambda}{k}, \quad \blacksquare \quad (12)$$

soit :

$$\sigma = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \cdot m}}. \quad \blacksquare \quad (13)$$

On évitera donc la résonance lorsque :

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k \cdot m}} \gtrsim 0,6, \text{ i.e. } \frac{\lambda}{\sqrt{k \cdot m}} \gtrsim 1,2. \quad \blacksquare \quad (14)$$

## 2 Spectre d'un signal numérique

6. Graphiquement, on lit  $3 \cdot T = 8 \text{ div} = 8 \cdot 250 \mu\text{s} = 2 \text{ ms}$ , donc :

$$T = \frac{2}{3} = 0,67 \text{ ms} \quad \text{et} \quad f = 1,5 \text{ kHz}. \quad \blacksquare \quad (15)$$

Il y a  $2480 \approx 2500$  échantillons sur  $10 \text{ div} = 2500 \mu\text{s}$ , donc  $T_{\text{éch}} \approx 1 \mu\text{s}$  et :

$$f_{\text{éch}} \approx 1 \text{ MHz}. \quad \blacksquare \quad (16)$$

Une bonne acquisition doit satisfaire au critère de Shannon, à savoir  $f_{\text{éch}} > 2 \cdot f_{\text{max}}$ . Un analyseur de spectre n'affiche donc que la fenêtre qui remplit *a priori* ce critère, soit :

$$f_{\text{éch}} = 2 \cdot f_{\text{max}}. \quad \blacksquare \quad (17)$$

Les valeurs numériques sont en accord avec cette égalité.

7. Il s'agit de diminuer  $f_{\text{max}}$ , donc  $f_{\text{éch}}$ , donc d'augmenter  $T_{\text{éch}}$  et ainsi la durée de l'acquisition. Il faut donc augmenter la base de temps pour « zoomer » sur le spectre. Ici, on a multiplié la base de temps par 100; ça va bien dans le bon sens. La nouvelle valeur de  $f_{\text{max}}$  est quant-à-elle divisée par 100, ce qui est cohérent avec la valeur obtenue.
8. On a désormais  $f_{\text{max}} = 1,24 \text{ kHz} \approx 1,25 \text{ kHz}$ , soit  $f_{\text{éch}} \approx 2,5 \text{ kHz}$  tandis que la fréquence du signal est de  $1,5 \text{ kHz}$ . Le critère de Shannon n'est pas vérifié; il y a repliement de spectre. On observe le pic correspondant à  $f_{\text{éch}} - f \approx 1 \text{ kHz}$ .
9. On applique la loi des nœuds au niveau de l'entrée inverseuse (ayant  $i_- = 0$  puisque l'A.O. est supposé idéal), en exprimant directement les courants via la loi d'Ohm :

$$\frac{V_1 - V_+}{R_1} + \frac{V_2 - V_+}{R_2} + \frac{V_3 - V_+}{R_3} + \frac{V_s - V_+}{R_0} = 0. \quad \blacksquare \quad (18)$$

Or, en régime linéaire,  $V_+ = V_-$ , avec ici  $V_- = 0$ , donc :

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = -\frac{V_s}{R_0}, \quad \blacksquare \quad (19)$$

soit :

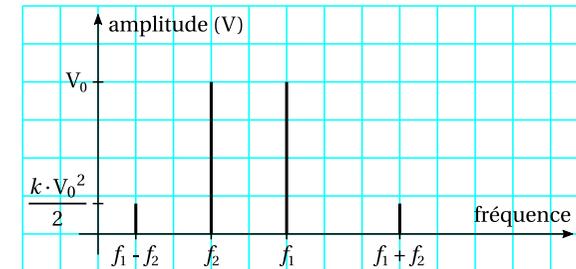
$$V_s = -R_0 \cdot \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right). \quad \blacksquare \quad (20)$$

Il s'agit d'une sorte de sommateur ou additionneur (inverseur), avec des pondérations sur les différentes tensions.

10. Pour  $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ , on a simplement  $V_s = -(V_1 + V_2 + V_m)$ , soit :

$$\begin{aligned} V_s(t) &= -\left( V_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + V_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) \right. \\ &\quad \left. + k \cdot V_0^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) \right) \\ &= -\left( V_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + V_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k \cdot V_0^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_1 - f_2) \cdot t) + \frac{k \cdot V_0^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_1 + f_2) \cdot t) \right). \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (21)$$

On suppose que  $f_1 > f_2$ . On obtient le spectre représenté Fig. C1.



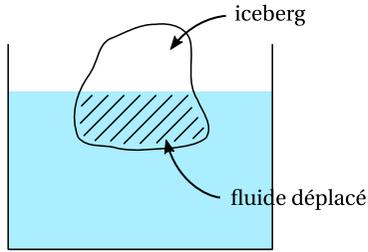
▲ Figure C1. Spectre en amplitude (allure).

11. En modifiant les résistances,  $V_s = -(V_1 + V_2 + 2 \cdot V_m)$ , donc l'amplitude des pics à  $f_1 - f_2$  et  $f_1 + f_2$  est multipliée par deux.
12. Si on suppose qu'il n'y a pas de repliement, alors  $f_1 + f_2$  est donné par le dernier pic, et  $f_1 - f_2$  par le premier (car il a la même amplitude). Le deuxième curseur donne  $f_1 = 900 \text{ Hz}$  et le deuxième donne  $f_1 - f_2 = 300 \text{ Hz}$ , soit  $f_2 = 600 \text{ Hz}$ .

## Deuxième partie. Eutrophisation.

13. On trace Fig. C2 une échelle de pH.





▲ **Figure C5.** Iceberg dans l'eau (schéma de principe).

tandis que le volume de l'iceberg est donné par :

$$V = \frac{m_{\text{iceberg}}}{d_{\text{gl}} \cdot \rho_{\text{eau}}}. \quad \blacksquare \quad (28)$$

On a donc :

$$\frac{V - v}{V} = \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{oc}}} = 1 - \frac{v}{V}, \quad \blacksquare \quad (29)$$

soit :

$$\boxed{\frac{v}{V} = 1 - \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{oc}}}}. \quad \blacksquare \quad (30)$$

20. On note  $S$  la surface de la Terre,  $e_{\text{banquise}}$  l'épaisseur de la banquise, et  $e_{\text{sup}}$  l'épaisseur d'eau supplémentaire à la surface des océans en cas de fonte totale de la banquise.

Le volume de la banquise est donné par :  $V = 0,015 \cdot S \cdot e_{\text{banquise}}$ , tandis que le volume d'eau supplémentaire à la surface des océans s'écrit :  $V_{\text{sup}} = 0,70 \cdot S \cdot e_{\text{sup}}$ .

Si les océans étaient faits d'eau douce, le niveau d'eau ne varierait pas (par équilibre mécanique, la masse de la banquise est la masse d'eau déplacée, donc l'eau en fondant va exactement occuper le volume déplacé). Le problème vient du fait que, l'eau de mer étant plus dense que l'eau douce, la poussée d'Archimède qui s'applique sur la banquise est (un peu) plus forte, ce qui fait que le volume émergé est un peu plus élevé que ce qu'on aurait sur de l'eau douce. C'est ce volume émergé supplémentaire qui va faire monter le niveau des mers et océans. En notant  $v_{\text{océan}}$  et  $v_{\text{douce}}$  les volumes émergés de la banquise sur l'océan et l'eau douce, on a :

$$\begin{aligned} V_{\text{sup}} = v_{\text{océan}} - v_{\text{douce}} &= V \cdot \left[ \left(1 - \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{oc}}}\right) - \left(1 - \frac{d_{\text{gl}}}{d_{\text{eau}}}\right) \right] \\ &= V \cdot d_{\text{gl}} \cdot \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right) = 0,015 \cdot S \cdot e_{\text{banquise}} \cdot d_{\text{gl}} \cdot \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right). \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (31)$$

Par identification,

$$0,70 \cdot S \cdot e_{\text{sup}} = 0,015 \cdot S \cdot e_{\text{banquise}} \cdot d_{\text{gl}} \cdot \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right), \quad \blacksquare \quad (32)$$

soit :

$$\boxed{e_{\text{sup}} = \frac{0,015}{0,70} \cdot e_{\text{banquise}} \cdot d_{\text{gl}} \cdot \left(1 - \frac{1}{d_{\text{oc}}}\right)} \approx \underline{7 \text{ mm}}. \quad \blacksquare \quad (33)$$

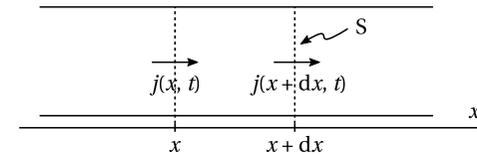
L'augmentation du niveau est minime. C'est essentiellement la fonte des glaciers (sur les continents) qui contribue à l'augmentation du niveau des mers et océans.

### Quatrième partie. Tornade.

21. Les équations relatives au champ magnétostatique s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{div}(\vec{B}) &= 0 \quad (\text{Maxwell-Thomson}) \\ \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \cdot \vec{j} \quad (\text{Maxwell-Ampère}). \end{aligned}} \quad \blacksquare \quad (34)$$

22. Soit une tranche de conducteur comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .



▲ **Figure C6.** Schéma de principe.

Entre  $t$  et  $t + dt$ , il entre par le plan d'abscisse  $x$  une charge :

$$\delta Q_{\text{entrant}} = j(x, t) \cdot S \cdot dt, \quad \blacksquare \quad (35)$$

tandis qu'il sort par le plan d'abscisse  $x + dx$  une charge :

$$\delta Q_{\text{sortant}} = j(x + dx, t) \cdot S \cdot dt. \quad \blacksquare \quad (36)$$

La variation globale de charge s'écrit donc, au premier ordre en  $dx$  et en  $dt$  :

$$dQ = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = -\frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot dx \cdot dt. \quad \blacksquare \quad (37)$$

Cette variation peut également s'exprimer de façon plus directe :

$$dQ = Q(t+dt) - Q(t) = (\rho(x, t+dt) - \rho(x, t)) \cdot S \cdot dx = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) \cdot S \cdot dx \cdot dt, \quad \blacksquare \quad (38)$$

soit en identifiant les deux relations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad \blacksquare \quad (39)$$

23. Pour un écoulement incompressible,  $\text{div}(\mu \cdot \vec{v}) = \mu \cdot \text{div}(\vec{v})$ , tandis que pour un écoulement stationnaire,  $\partial \mu / \partial t = 0$ , donc pour un écoulement incompressible et stationnaire :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0. \quad \blacksquare \quad (40)$$

Soit un contour fermé  $\Gamma$  de l'espace et soit une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur  $\Gamma$ , orientée dans le sens direct par rapport à celui-ci. D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} 2 \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{S}, \quad \blacksquare \quad (41)$$

soit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2 \cdot \iint_{\mathcal{S}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}. \quad \blacksquare \quad (42)$$

24. On utilise les coordonnées cylindriques d'axe ( $O_z$ ). Le champ de vecteur tourbillon est invariant par rotation autour de l'axe ( $O_z$ ) ainsi que par translation le long de cet axe, donc le champ des vitesses  $\vec{v}$  de dépend que de  $r$ . Par ailleurs, pour un point M donné de l'espace, le plan tangent à l'axe ( $O_z$ ) et passant par M est un plan de symétrie pour le champ de vecteur tourbillon. Par analogie avec le champ magnétique, on en déduit que c'est un plan d'antisymétrie pour le champ des vitesses, si bien que finalement,

$$\vec{v}(M) = v(r) \cdot \vec{e}_{\theta}. \quad \blacksquare \quad (43)$$

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle d'axe ( $O_z$ ) passant par M( $r, \theta, z$ ), orienté dans le sens direct par rapport à  $\vec{e}_z$ , et soit  $\mathcal{D}$  le disque inscrit dans le cercle, orienté dans le sens direct par rapport à celui-ci.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v(r). \quad \blacksquare \quad (44)$$

Par ailleurs, si  $r < R_T$ ,

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \pi \cdot r^2 \cdot \omega_0, \quad \blacksquare \quad (45)$$

tandis que si  $r \geq R_T$ ,

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \pi \cdot R_T^2 \cdot \omega_0. \quad \blacksquare \quad (46)$$

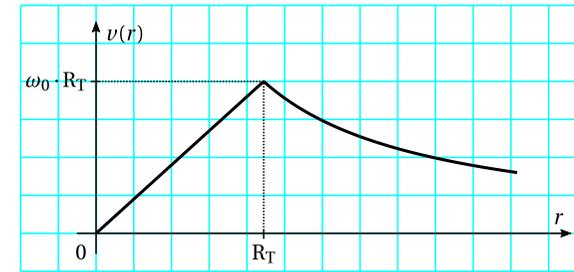
On applique le théorème établi à la question précédente. Si  $r < R_T$ , alors  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot v(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \omega_0$ , soit :

$$\vec{v}(M) = \omega_0 \cdot r \cdot \vec{e}_r. \quad \blacksquare \quad (47)$$

Si  $r \geq R_T$ , alors :

$$\vec{v}(M) = \frac{\omega_0 \cdot R_T^2}{r} \cdot \vec{e}_r. \quad \blacksquare \quad (48)$$

On donne l'allure du profil de vitesse sur la Fig. C7.



▲ Figure C7. Profil de vitesse (allure).

25. *Théorème de Bernoulli.* Soit un fluide parfait en écoulement stationnaire, incompressible et homogène. Alors le long d'une ligne de courant,

$$\frac{\mu \cdot v^2}{2} + \mu \cdot g \cdot z + p = \text{constante}. \quad \blacksquare \quad (49)$$

Soit une ligne de courant entre un point à la surface du cyclone et un autre de même altitude situé loin du cyclone. La relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\rho_0 \cdot v^2(R_T)}{2} + \rho_0 \cdot g \cdot z + p(R_T) = 0 + \rho_0 \cdot g \cdot z + p^\circ, \quad \blacksquare \quad (50)$$

soit :

$$p(R_T) = p^\circ - \frac{\rho_0 \cdot v^2(R_T)}{2} = p^\circ - \frac{\rho_0 \cdot R_T^2 \cdot \omega_0^2}{2}. \quad \blacksquare \quad (51)$$

26. La dépression s'écrit :

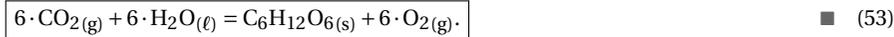
$$\Delta p = \frac{\rho_0 \cdot v^2 (R_T)}{2} = \frac{1,2 \cdot 180^2}{3,6^2 \cdot 2} = \frac{180^2}{3 \cdot 3,6 \cdot 2} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 2}$$

$$= \frac{180 \cdot 10}{1,2} = \frac{3 \cdot 60 \cdot 10}{1,2} = \underline{1500 \text{ Pa.}}$$

27. La densité surfacique de poids vaut environ  $400 \text{ N} \cdot \text{m}^2 = 400 \text{ Pa}$ , donc la dépression engendrée par une tornade l'emporte largement sur la gravité, d'où la nécessité de fixer les tuiles!

### Cinquième partie. Nécessité de la chlorophylle.

28. L'équilibre de synthèse du glucose s'écrit :



29. Soit  $n = m/M_g$  la quantité de glucose formée. Alors on forme  $6 \cdot n$  moles de dioxygène, soit pour un gaz parfait :

$$V(\text{O}_2) = \frac{6 \cdot n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{6 \cdot m \cdot R \cdot T}{M_g \cdot p}.$$

30. L'enthalpie libre de réaction s'écrit :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + R \cdot T \cdot \ln(Q_r) \approx 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 \cdot \ln\left(\frac{20^6}{0,03^6}\right)$$

$$\approx 3 \cdot 10^6 + 18 \cdot 10^3 \cdot \ln\left(\frac{2000}{3}\right) \approx 3 \cdot 10^6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

L'entropie de réaction est positive, donc le système évolue spontanément dans le sens indirect. Il est donc indispensable d'avoir des arbres pour effectuer la réaction de manière forcée dans le sens direct et ainsi produire du dioxygène.

### Sixième partie. Séchage des sols.

31. La pression de vapeur saturante d'une espèce est la pression de l'espèce en phase gazeuse lorsque celle-ci est à l'équilibre avec la phase liquide. Pour que le sol sèche, il faut avoir  $p_{\text{ext}} < p_{\text{sat}}(T)$ , sans quoi l'eau est à l'équilibre et ne s'évapore pas.

32. La pression d'eau à proximité immédiate du sol est un peu plus grande que celle dans l'air. Le vent tend à homogénéiser cette pression, et donc en particulier à réduire la pression d'eau à la surface du sol, ce qui a pour effet de favoriser le phénomène d'évaporation, et donc le dessèchement du sol.

33. Loi de Fick.

$$\vec{j} = -D \cdot \text{grad}(n),$$

avec  $\vec{j}$  le vecteur densité volumique de courant de particules (en  $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $D$  le coefficient de diffusion (en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) et  $n$  la densité particulaire (en  $\text{m}^{-3}$ ).

34. En régime stationnaire, l'équation de diffusion s'écrit  $\text{div}(\vec{j}) = 0$  avec ici  $\text{div}(\vec{j}) = dj/dz$  donc  $j$  est uniforme. Ayant par ailleurs  $\Phi_s = j \cdot S$ , le débit est uniforme également.

35. D'après la loi de Fick,

$$\Phi_s = -D \cdot S \cdot \frac{dn_{\text{vap}}}{dz}, \text{ soit } \frac{dn_{\text{vap}}}{dz} = -\frac{\Phi_s}{D \cdot S}.$$

On intègre entre  $z$  et  $z_m$  :

$$n_{\text{vap}}(z) - n_{\text{vap}}(z_m) = -\frac{\Phi_s}{D \cdot S} \cdot (z - z_m),$$

soit :

$$n_{\text{vap}}(z) = n_{\text{vap}}(z_m) - \frac{\Phi_s}{D \cdot S} \cdot (z - z_m).$$

36. En  $z = z_m$ , l'eau est à la pression de vapeur saturante. D'après la loi des gaz parfait,  $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$  donc  $p = n_{\text{vap}} \cdot k_B \cdot T$ , et en particulier :

$$p_{\text{sat}} = n_{\text{vap}}(z_m) \cdot k_B \cdot T = n_{\text{vap}}(z_m) \cdot \frac{R \cdot T}{\mathcal{N}_a},$$

d'où :

$$n_{\text{vap}}(z_m) = \frac{\mathcal{N}_a \cdot p_{\text{sat}}}{R \cdot T}.$$

37. On combine les résultats des deux questions précédentes :

$$n_{\text{vap}}(z) = \frac{\mathcal{N}_a \cdot p_{\text{sat}}}{R \cdot T} - \frac{\Phi_s}{D \cdot S} \cdot (z - z_m).$$

38. On en déduit, d'après la loi des gaz parfaits,

$$p(\text{H}) = n_{\text{vap}}(\text{H}) \cdot \frac{R \cdot T}{\mathcal{N}_a} = p_{\text{sat}}(T) - \frac{R \cdot T \cdot \Phi_s}{\mathcal{N}_a \cdot D \cdot S} \cdot (\text{H} - z_m).$$

39. À la surface du sol,  $\Phi_s = h \cdot S \cdot (p(H) - p_{\text{ext}})$ , donc :

$$\Phi_s = h \cdot S \cdot \left( p_{\text{sat}}(T) - \frac{R \cdot T \cdot \Phi_s}{\mathcal{N}_a \cdot D \cdot S} \cdot (H - z_m) - p_{\text{ext}} \right). \quad \blacksquare \quad (64)$$

On factorise les termes en  $\Phi_s$  :

$$\Phi_s \cdot \left( 1 + h \cdot S \cdot \frac{R \cdot T}{\mathcal{N}_a \cdot D \cdot S} \cdot (H - z_m) \right) = \Phi_s \cdot \left( 1 + \frac{h \cdot R \cdot T}{\mathcal{N}_a \cdot D} \cdot (H - z_m) \right) = h \cdot S \cdot (p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}}), \quad \blacksquare \quad (65)$$

soit :

$$\Phi_s = \frac{h \cdot S \cdot (p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}})}{1 + \frac{h \cdot R \cdot T}{\mathcal{N}_a \cdot D} \cdot (H - z_m)}. \quad \blacksquare \quad (66)$$

40. Dans une tranche d'épaisseur  $dz$  de sol mouillé, il y a  $dN = n_{\text{liq}} \cdot S \cdot dz$  molécules d'eau. Par ailleurs, pendant  $dt$ , il s'évapore  $\Phi_s \cdot dt = -dN$  molécules, soit par identification :

$$n_{\text{liq}} \cdot S \cdot dz = -\Phi_s \cdot dt, \quad \blacksquare \quad (67)$$

soit :

$$\frac{dz_m}{dt} = -\frac{\Phi_s}{n_{\text{liq}} \cdot S}. \quad \blacksquare \quad (68)$$

41. On réinjecte l'expression du débit dans la relation précédente :

$$\frac{dz_m}{dt} = -\frac{h}{n_{\text{liq}}} \cdot \frac{(p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}})}{1 + \frac{h \cdot R \cdot T}{\mathcal{N}_a \cdot D} \cdot (H - z_m)}. \quad \blacksquare \quad (69)$$

On résout par séparation des variables :

$$\left( 1 + \frac{h \cdot R \cdot T}{\mathcal{N}_a \cdot D} \cdot (H - z_m) \right) \cdot dz_m = -\frac{h}{n_{\text{liq}}} \cdot (p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}}) \cdot dt, \quad \blacksquare \quad (70)$$

soit :

$$d \left( \left( 1 + \frac{h \cdot R \cdot T \cdot H}{\mathcal{N}_a \cdot D} \right) \cdot z_m - \frac{h \cdot R \cdot T}{2 \cdot \mathcal{N}_a \cdot D} \cdot z_m^2 \right) = d \left( -\frac{h}{n_{\text{liq}}} \cdot (p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}}) \cdot t \right). \quad \blacksquare \quad (71)$$

On intègre entre  $(t, z_m) = (0, H)$  et  $(\tau_{\text{séchage}}, 0)$  :

$$\left( 1 + \frac{h \cdot R \cdot T \cdot H}{\mathcal{N}_a \cdot D} \right) \cdot H - \frac{h \cdot R \cdot T}{2 \cdot \mathcal{N}_a \cdot D} \cdot H^2 - 0 = \frac{h}{n_{\text{liq}}} \cdot (p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}}) \cdot \tau_{\text{séchage}}. \quad \blacksquare \quad (72)$$

On simplifie :

$$H + \frac{h \cdot R \cdot T \cdot H^2}{2 \cdot \mathcal{N}_a \cdot D} = \frac{h}{n_{\text{liq}}} \cdot (p_{\text{sat}}(T) - p_{\text{ext}}) \cdot \tau_{\text{séchage}}, \quad \blacksquare \quad (73)$$

soit :

$$\tau_{\text{séchage}} = \frac{n_{\text{liq}} \cdot H}{h \cdot (p_{\text{sat}} - p_{\text{ext}})} \cdot \left( 1 + \frac{h \cdot R \cdot T \cdot H}{2 \cdot \mathcal{N}_a \cdot D} \right). \quad \blacksquare \quad (74)$$

42. On pose :

$$H_{\text{lim}} = \frac{2 \cdot \mathcal{N}_a \cdot D}{h \cdot R \cdot T}. \quad \blacksquare \quad (75)$$

Le temps de séchage se réécrit :

$$\tau_{\text{séchage}} = \frac{n_{\text{liq}} \cdot H}{h \cdot (p_{\text{sat}} - p_{\text{ext}})} \cdot \left( 1 + \frac{H}{H_{\text{lim}}} \right). \quad \blacksquare \quad (76)$$

43. Pour  $H \ll H_{\text{lim}}$ ,  $\tau_{\text{séchage}}$  est proportionnel à  $H$ , ce qui semble assez bien vérifié à l'échelle de quelques heures (Fig. 12), tandis que  $\tau_{\text{séchage}}$  est proportionnel à  $H^2$  pour  $H \gg H_{\text{lim}}$  (Fig. 11).

Numériquement, à l'aide des valeurs de l'énoncé, on trouve :

$$H_{\text{lim}} \approx \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{17} \cdot 10 \cdot 300} \approx \frac{12}{3000} \approx \underline{4 \text{ mm}}. \quad \blacksquare \quad (77)$$

C'est, à un facteur 2 près, la hauteur maximale reportée sur la Fig. 12, ce qui est en accord avec les remarques précédentes : pour  $H < H_{\text{lim}}/10$ , la courbe est très bien approchée par une droite.