Centrale PSI 2012 : Impact d'un bolide avec la Terre

Auteurs : Jean-Marc Vince
Jean-Baptiste Paire

I. Collision entre un bolide et la Terre :

I.A.1. Le principe d'inertie définit les référentiels galiléens : un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme.

I.A.2. Si la Terre et le Soleil sont à symétrie sphérique, le champ de force gravitationnel dû à ces astres sera lui aussi à symétrie sphérique (Théorème de GAUSS : on pourra considérer pour un point à l'extérieur de ces astres que la masse est regroupée au centre).

Si la masse de la Terre est négligeable devant celle du Soleil, on peut considérer que le barycentre du système est le centre du Soleil et que le mobile réduit est assimilable au centre de la Terre. Cela permet aussi de supposer que le référentiel de Kepler, lié au centre du Soleil, est galiléen.

I.A.3. Le système étudié est la Terre, le référentiel est le référentiel de Kepler galiléen. La Terre n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil : cette force est une force centrale, elle dérive donc d'une énergie potentielle fonction que de la distance r = ST.

On applique le théorème de l'énergie mécanique : Ec + Ep = cste. Sur une trajectoire circulaire, Ep(r) = cste, on a donc Ec = Cste, donc la vitesse est constante en norme, le mouvement est bien uniforme.

On applique le principe fondamentale de la dynamique et on le projette sur le vecteur unitaire orthoradial $\vec{e}_\theta$: $-m\frac{v^2}{R_0} = -G\frac{mM_S}{R_0^2}$ donc $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{R_0}} = 30\ km.s^{-1}$.

I.B.1. On applique le loi de composition des vitesses : $\vec{v}_b = \vec{v}_r + \vec{v}_T$

On en tire donc $|v_b - v_T| \leq v_r \leq |v_b + v_T|$ soit $0 \leq v_r \leq 60\ km.s^{-1}$

I.B.2. Système : le bolide de masse m_b, le référentiel est lié au centre de la Terre, supposé galiléen.

Actions subies : l'attraction gravitationnelle de la Terre (le texte précise bien que l'on considère le système {terre + bolide} isolé).

On obtient : $E_P = -G\frac{m_b.M_T}{r}$ et $E_C = \frac{1}{2}m_b.v^2$ donc $E_m = \frac{1}{2}m_b.v^2 - G\frac{m_b.M_T}{r}$.

Celle-ci est constante, et l'infini $E_P = 0$, donc $E_m > 0$ car la vitesse est non nulle, la trajectoire est donc une branche d'hyperbole (si le moment cinétique est non nul), sinon une demi droite (si le moment cinétique est nul).

I.B.3.a. On applique le Théorème du Moment Cinétique au bolide dans le référentiel géocentrique galiléen : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Le moment cinétique est une constante du mouvement.

A l'infini $\|\vec{L}_O\| = m_b.b.v_r$, et à la distance minimale d'approche $\|\vec{L}_O\| = m_b.d_{min}.v_A$

Soit $b.v_r = d_{min}.v_A$

I.B.3.b. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}m_b.v_A^2 - G\frac{m_b.M_T}{d_{min}} = \frac{1}{2}m_b.v_r^2$

Donc : $\frac{1}{2}m_b.v_r^2.\frac{b^2}{d_{min}^2} - G\frac{m_b.M_T}{d_{min}} = \frac{1}{2}m_b.v_r^2$, soit $d_{min}^2 + 2\frac{GM_T}{v_r^2}.d_{min} - b^2 = 0$

d'où : $d_{min} = -\frac{GM_T}{v_r^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_r^2}\right)^2 + b^2}$

I.B.3.c. On a impact si $d_{min} \leq R_T$ donc si $\left(\frac{GM_T}{v_r^2}\right)^2 + b^2 \leq \left(R_T + \frac{GM_T}{v_r^2}\right)^2$

donc si $b \leq b_{max} = \sqrt{\left(R_T + \frac{GM_T}{v_r^2}\right)^2 - \left(\frac{GM_T}{v_r^2}\right)^2}$

I.B.4.a. En cas de collision, $r = R_T$, avec l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m_b.v_i^2 - G\frac{m_b.M_T}{R_T} = \frac{1}{2}m_b.v_r^2$

Soit $v_i = \sqrt{v_r^2 + v_l^2}$ avec $v_l = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$: c'est la vitesse de libération : $v_l = 11\ km.s^{-1}$

I.B.4.b. On a donc : $v_l \leq v_i \leq \sqrt{(v_b + v_T)^2 + v_l^2}$ soit $11\ km.s^{-1} \leq v_i \leq 61\ km.s^{-1}$

I.C.1. La masse du bolide : $m_b = \frac{4}{3}\pi r_b^3.\rho_b = 5{,}4.10^9 kg$

Soit $E_{Cb} = \frac{1}{2}m_b v_i^2 = 1{,}1.10^{18} J$

I.C.2. Cette énergie est équivalente à l'énergie libérée par $2{,}6.10^8$ tonnes de TNT, c'est-à-dire équivalent à 17000 fois l'énergie libérée par la bombe d'Hiroshima.

II. Traversée de l'atmosphère par le bolide - Cratère d'impact

II.A.1. L'air est considéré comme un gaz parfait : $PV = nRT_0 = \frac{m}{M_{air}}RT_0$ d'où $\frac{m}{V} = \rho = \frac{PM_{air}}{RT_0}$

II.A.2. On applique la relation fondamentale de l'hydrostatique : $\overrightarrow{grad}.P = \rho\vec{g}$ (l'atmosphère est supposée au repos dans le référentiel terrestre galiléen).

On projette : $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ la pression n'est donc fonction que de z et $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

L'air est considéré comme un gaz parfait : $\rho = \frac{PM}{RT_0}$ soit $\frac{d}{dz}\left(\frac{\rho RT_0}{M_{air}}\right) = -\rho g$ soit $\frac{d\rho}{dz} = -\frac{M_{air}g}{RT_0}.\rho$

On sépare les variables $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M_{air}g}{RT_0}.dz$ et on intègre : $\rho(z) = \rho_0.exp\left(-\frac{M_{air}g}{RT_0}z\right) = \rho_0.exp\left(-\frac{z}{H_a}\right)$

avec $H_a = \frac{RT_0}{M_{air}g}$

II.A.3. $\rho_0 = 1{,}20\ kg.m^{-3}$ et $H_a = 8500\ m$

II.B.1.a. $R_e = \frac{\rho vL}{\eta} = 10^{11}$ ici. L'écoulement est très turbulent, la couche limite (turbulente) est largement décollée. Ce sont les forces de pression qui dominent sur les forces de viscosité, la trainée est donc en v^2.

II.B.1.b. $mg = 5{,}3.10^{10}\ N$ et $F_t = \frac{1}{2}C\rho\pi r_b^2 v^2 = 9{,}7.10^{12}\ N$

Le rapport est supérieur à un facteur 100, on peut bien négliger le poids devant la force de trainée.

II.B.2.a. On applique le principe fondamental au bolide dans le référentiel terrestre supposé galiléen. celui-ci n'est soumis qu'à la force de trainée. On projette sur le vecteur unitaire tangent à la trajectoire : $m_b.a = -\frac{1}{2}C\rho(z)\pi r_b^2 v^2$ avec $m_b = \frac{4}{3}\pi r_b^3.\rho_b$ soit : $a = -\frac{3}{8}.C.\frac{\rho(z)}{\rho_b}.\frac{v^2}{r_b}$

II.B.2.b. $\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dt}.\frac{dt}{dz} = \frac{dv}{dt}.\frac{1}{v_z} = \frac{a}{v_z}$ d'où $\frac{dv}{dz} = \frac{3}{8}.C.\frac{\rho(z)}{\rho_b.r_b}.\frac{v}{cos\theta}$

II.B.2.c. On a $\rho(z) = \rho_0.exp\left(-\frac{z}{H_a}\right)$ soit $\frac{dv}{dz} = \frac{3}{8}.C.\frac{\rho_0}{\rho_b.r_b}.\frac{v}{cos\theta}.exp\left(-\frac{z}{H_a}\right)$

On sépare les variables : $\frac{dv}{v} = \frac{3}{8}.C.\frac{\rho_0}{\rho_b.r_b}.\frac{1}{cos\theta}.exp\left(-\frac{z}{H_a}\right).dz$

Soit $Ln(v) = -\frac{3}{8}.C.\frac{\rho_0}{\rho_b.r_b}.\frac{H_a}{cos\theta}.exp\left(-\frac{z}{H_a}\right) + Cste$ et pour $z = +\infty$, $v = v_i$

Donc : $Ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\frac{3}{8}.C.\frac{\rho_0}{\rho_b.r_b}.\frac{H_a}{cos\theta}.exp\left(-\frac{z}{H_a}\right)$

II.B.3.a. $v(0) = 0{,}95.v_i = 19\ km.s^{-1}$. Le bolide n'a perdu que 5% de sa vitesse.

II.B.3.b. $\Delta E_C = \frac{1}{2}.m_b.(v_i^2 - v_{sol}^2) = 1{,}10.10^{17}\ J$, soit 1/10 de l'énergie cinétique initiale.

II.C.1. $e_{Cm} = \frac{1}{2}.v_i^2 = 1{,}8.10^8\,J.kg^{-1}$L'énergie cinétique massique est supérieure à 10 fois l'enthalpie massique de vaporisation.

II.C.2.a. Y est une énergie volumique. Elle s'exprime donc en J.m^{-3}

II.C.2.b. Le travail du poids est de la forme mgh, ici $E_g = \frac{2}{3}\pi R^3.\rho_c.g.\frac{3D}{16}$ avec $D = 2R$, soit donc $E_g = \frac{1}{64}\pi D^4.\rho_c.g$

II.C.2.c. On écrit que l'énergie cinétique initiale sert à vaporiser la matière du cratère et à amener cette matière au niveau du sol, soit $\frac{1}{2}.m_b.v_i^2 = \frac{1}{64}\pi D^4.\rho_c.g + Y.\frac{1}{12}\pi D^3$

II.C.2.d. La résolution numérique donne $D = 4{,}2\,km$, ce qui est bien supérieur au diamètre initial du bolide (160 m).

III. Thermodynamique de la traversée de l'atmosphère

III.A. La puissance de la force de traînée : $P = \vec{F}_t.\vec{v} = -\frac{1}{2}.C.\rho_{air}.\pi r_b^2 v^3$

Application numérique : $|P| = 1{,}9.10^{17}W = 1{,}9.10^8GW$. La puissance dissipée est évidemment considérable, l'équivalent de 190 millions de réacteurs nucléaires.

III.B.1. L'approximation acoustique consiste à considérer que les perturbations sont du 1er ordre, soit $|p_a| \ll P_e$, $|\rho_a| \ll \rho_e$ et $|u| \ll c$ où c est la vitesse de l'onde dans le milieu.

Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0$ (1)

Equation d'EULER : $\rho.\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\overrightarrow{grad}\right).\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}p$ (2)

On ne conserve que l'ordre 1 : (1) devient : $\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_e.div(\vec{u}) = 0$

(2) devient $(\rho_a + \rho_e).\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\overrightarrow{grad}\right).\vec{u}\right) = (\rho_a + \rho_e)\vec{g} - \overrightarrow{grad}(p_a + P_e)$

soit $(\rho_a + \rho_e).\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\overrightarrow{grad}\right).\vec{u}\right) = \rho_e\vec{g} - \overrightarrow{grad}P_e + \rho_a\vec{g} - \overrightarrow{grad}p_a$

Or au repos $\rho_e\vec{g} - \overrightarrow{grad}P_e = \vec{0}$ (hydrostatique) et on peut considérer que $\|\rho_a\vec{g}\| \ll \left\|\overrightarrow{grad}p_a\right\|$ dès que les fréquences ne sont pas très petites (typiquement $f \gg 0{,}03\,Hz$)

L'équation d'EULER donne donc $\rho_e.\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}p_a$ à l'ordre 1.

III.B.2. Les variations sont faibles et les durées caractéristiques sont négligeables devant les durées caractéristiques de l'échange thermique par conduction, on peut donc considérer que les transformations sont adiabatiques et mécaniquement réversibles, le gaz est parfait, ces transformations sont donc isentropiques.

On a $\chi_S = \frac{1}{\rho}.\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \approx \frac{1}{\rho_e}.\frac{\rho - \rho_e}{P - P_e} = \frac{1}{\rho_e}.\frac{\rho_a}{p_a}$ soit $\rho_a = \chi_S.\rho_e.p_a$

Par ailleurs, le gaz est parfait, et la transformation isentropique, on peut appliquer les formules de LAPLACE : $pV^\gamma = Cste$ soit $p\rho^{-\gamma} = Cste$, avec une différentielle logarithmique : $\frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0$

et donc $\chi_S = \frac{1}{\rho}.\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\gamma p} \approx \frac{1}{\gamma P_e}$

II.B.3.a. On reprend les trois équations :

(1) : $\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_e.div(\vec{u}) = 0$

(2) : $\rho_e.\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}p_a$

(3) : $\rho_a = \chi_S.\rho_e.p_a$

(1) et (3) : $\chi_S.\rho_e.\frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_e.div(\vec{u}) = 0$ soit $\chi_S.\frac{\partial p_a}{\partial t} + div(\vec{u}) = 0$

On dérive par rapport au temps : $\chi_S.\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}div(\vec{u}) = \chi_S.\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + div\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = 0$ (Schwarz)

Avec (2) : $\chi_S.\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} + div\left(-\frac{1}{\rho_e}\overrightarrow{grad}p_a\right) = 0$ soit $\rho_e\chi_S.\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - div\left(\overrightarrow{grad}p_a\right) = 0$

et $\rho_e\chi_S.\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$

On récupère donc bien une équation de d'ALEMBERT, avec $c_a^2 = \frac{1}{\rho_e\chi_S} = \frac{\gamma P_e}{\rho_e}$

III.B.3.b. En considérant que l'air est un gaz parfait : $\rho_e = \frac{M_{air}.P_e}{RT}$ soit $c_a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{air}}} = 340\ m.s^{-1}$.

III.C.1. $M_1 = \frac{v_1}{c_1} = 59$

III.C.2. On choisit comme système l'air dans le cylindre à t + l'air qui y entre entre t et t+dt (de masse dm).

Comme le système est considéré être en régime permanent, la masse dm qui entre dans le cylindre entre t et t+dt est aussi égale à la masse de l'air qui en sort pendant la même durée.

Donc $dm(entrant) = dm(sortant)$ soit $\rho_1 v_1 Sdt = \rho_2 v_2 Sdt$ d'où $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ (R1)

III.C.3. Sur le même système, on calcule les quantités de mouvement à t et à t+dt

$\vec{p}(t) = \vec{p}(\Sigma) + \rho_1 v_1 Sdt.\vec{v}_1 = \vec{p}(\Sigma) + \rho_1 v_1^2 Sdt.\vec{u}$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire dirigeant la trajectoire)

$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(\Sigma) + \rho_2 v_2 Sdt.\vec{v}_2 = \vec{p}(\Sigma) + \rho_2 v_2^2 Sdt.\vec{u}$

On applique le Théorème de la Résultante Cinétique au système précédent, en négligeant le poids dans le référentiel lié au bolide supposé galiléen.

Il n'y a donc que les forces pressantes dans les forces extérieures, et la projection sur $\vec{u}$ donne : $\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = P_1 - P_2$ après simplification par S. (R2)

III.C.4.a. Avec le même système, on fait un bilan d'énergie, ce qui revient à écrire le premier principe entre t et t+dt, en supposant la transformation adiabatique :

Soit : $dE_C + dU = \delta W + \delta Q = \delta W$ (adiabatique)

Avec $dE_C = \left(E_{C,t+dt}(\Sigma) + \frac{1}{2}v_2^2 dm\right) - \left(E_{C,t}(\Sigma) + \frac{1}{2}v_1^2 dm\right) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)dm$

et $dU = (U_{t+dt}(\Sigma) + u_2 dm) - (U_t(\Sigma) + u_1 dm) = (u_2 - u_1)dm$

Calcul du travail : δW : c'est le travail de la force pressante associée à P_1 + celle associée à P_2, donc $\delta W = P_1.S.v_1 dt - P_2.S.v_2 dt = (P_1.u_1 - P_2.u_2)dm$ où u_2 et u_1 sont respectivement les volumes massiques associés aux grandeurs de sortie et d'entrée.

On obtient : $\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)dm + (u_2 - u_1)dm = (P_1.u_1 - P_2.u_2)dm$

Soit $\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + (u_2 + P_2.u_2 - u_1 - P_1.u_1) = 0$

et enfin : $\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + (h_2 - h_1) = 0$ où h est l'enthalpie massique. (R3)

III.C.4.b. L'air est un gaz parfait, donc $h_2 - h_1 = \frac{R\gamma}{M_{air}(\gamma-1)}(T_2 - T_1)$

D'où : $h_2 - h_1 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right)$ avec $\rho = \frac{PM_{air}}{RT}$

III.C.4.c. Avec R3 et R4 on obtient : $\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}\right) = 0$

III.D.1. On a $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{air}}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

On a donc $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{P_2}{P_1} . \frac{\rho_1}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{2\rho_1 v_1^2}{\gamma+1} . \frac{1}{P_1} . \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$
Soit : $M_2 = \frac{v_2}{c_2} = \frac{v_2}{v_1} . \sqrt{\frac{P_1.(\gamma+1)^2}{2\rho_1.(\gamma-1)}} . \frac{1}{c_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} . \sqrt{\frac{P_1.(\gamma+1)^2}{2\rho_1.(\gamma-1)}} . \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma P_1}} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0{,}38$
L'écoulement redevient donc subsonique.
III.D.2. Avec la loi des gaz parfaits : $\rho_2 = \frac{P_2 M_{air}}{RT_2}$
Donc $T_2 = \frac{P_2 M_{air}}{R\rho_2} = \frac{2\rho_1 v_1^2}{\gamma+1} . \frac{1}{\rho_1} . \frac{\gamma-1}{\gamma+1} . \frac{M_{air}}{R} = \frac{2M_{air}}{R} . v_1^2 . \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} = 2.10^5 K$
III.D.3. A cette température, on ne peut plus avoir $\gamma = \frac{7}{5}$, le gaz s'est ionisé et dissocié, la température atteinte est plus faible pour de multiples raisons : l'énergie nécessaire à la dissociation et l'ionisation, la capacité calorifique plus grande (2 fois plus de molécules, sans compter les électrons) et l'énergie rayonnée.

III.E.1. L'auteur attend que la température de surface ne peut pas dépasser sa température de sublimation mais ici on semble bien loin d'un corps pur à l'équilibre thermodynamique ! Les durées sont très courtes, l'échauffement non homogène, mélange de corps purs, etc...Ca paraît très "risqué" d'affirmer un tel résultat, mais bon...
Soit Δm la masse vaporisée pendant la durée Δt, en considérant que l'énergie reçue par le bolide ne sert qu'à la vaporisation (on néglige donc l'échauffement de la matière avant sublimation, et l'échauffement du gaz après, alors que la température atteinte le passera probablement à l'état de plasma) : $\Delta m . h_v = P . \Delta t = 4\pi r_b^2 c_a \sigma T_2'^4 . \Delta t$.
III.E.2. La distance parcourue est $\frac{H_a}{cos\theta}$, soit $t_a = \frac{H_a}{v.cos\theta}$.
On maximise Δm en choisissant $c_a = 1$
et $\Delta m_{\max} = \frac{4\pi r_b^2 \sigma T_2'^4}{h_v} . \frac{H_a}{v.cos\theta}$
III.E.3. $t_a = 0{,}6\ s$. $\Delta m_{\max} = 5{,}5.10^7$ kg, et $\frac{\Delta m_{\max}}{\mathrm{m}} = 1\%$.
Il était légitime (dans le cadre des hypothèses) de négliger la variation de masse du bolide.
III.E.4. On écrit l'équation de diffusion thermique à 1D : $\rho c_v . \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
Une longueur caractéristique s'écrit donc $L \approx \sqrt{\frac{\lambda.t}{\rho c_v}} \approx 1\ mm$
L'échauffement semble se localiser à la surface, on ne peut pas avoir un échauffement "en bloc" du bolide.

IV . Tsunami causé par l'impact du bolide dans l'océan

IV.A.1. Les ondes de gravité ne sont pas des ondes acoustiques pour plusieurs raisons : le milieu est supposé incompressible, et les ondes de gravité sont transversales.
IV.A.2.a. $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v} \wedge \vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{grad}P$
Le texte précise que l'écoulement est irrotationnel soit $\overrightarrow{rot}\vec{v} = \vec{0}$
On projette sur Oz : $0 = -\mu g - \frac{\partial P}{\partial z}$ soit $P(x, y, z, t) = -\mu g z + cste$
Or, si $z = H + \varphi(x, y, t)$ alors $P = P_0$ donc $P(x, y, z, t) = \mu g(-z + H + \varphi(x, y, t)) + P_0$
IV.A.2.b. On pose $P_e(M) = P_0 - \mu g(z - H)$ soit $p(M, t) = \mu . g . \varphi(M, t)$
IV.A.3. Il s'agit d'un bilan de masse.

IV.B.1. On linéarise les équations précédentes :
<u>Conservation de la masse :</u> $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H.div\vec{v} = 0$
<u>Equation d'EULER :</u> $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g.\overrightarrow{grad}\varphi$
IV.B.2. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + H.\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{v}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + H.div\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - H.g.div\left(\overrightarrow{grad}\varphi\right) = 0$
On a donc : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - H.g.\Delta\varphi = 0$.
De même : $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -g.\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{grad}\varphi\right) = -g.\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = H.g.\overrightarrow{grad}(div\vec{v})$
Or $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{v}\right) = \overrightarrow{grad}(div\vec{v}) - \Delta\vec{v}$ et l'écoulement est irrotationnel $\overrightarrow{grad}(div\vec{v}) = \Delta\vec{v}$
et donc : $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + H.g.\Delta\vec{v} = \vec{0}$
On a des équations de d'ALEMBERT avec $c = \sqrt{Hg}$ AN : $c = 190\ m.s^{-1}$.
On appelle ces ondes des ondes de gravité car le couplage entre les grandeurs fait apparaitre la gravité.

IV.C.1. On pose $\varphi(r,t) = \frac{u(r,t)}{\sqrt{r}}$
Soit $\Delta\varphi = \frac{1}{r}.\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u(r,t)}{\sqrt{r}}\right)\right)\right) = \frac{1}{r}.\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\left(\frac{1}{\sqrt{r}}.\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2}.r^{-3/2}.u\right)\right)\right) = \frac{1}{r}.\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r}.\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{2\sqrt{r}}\right)\right)$
$= \frac{1}{r}.\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}.\frac{\partial u}{\partial r} + \sqrt{r}.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{2\sqrt{r}}.\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{4}.r^{-3/2}.u\right) = \frac{1}{\sqrt{r}}.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{4}.r^{-5/2}.u$
Dans l'équation de propagation : $\frac{1}{\sqrt{r}}.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2.\left(\frac{1}{\sqrt{r}}.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{4}.r^{-5/2}.u\right) = 0$
d'où : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{c^2}{4r^2}.u = 0$
IV.C.2. On peut négliger $\frac{c^2}{4r^2}.u$ devant $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: si on raisonne en ordre de grandeur $\frac{c^2}{4r^2}.u \ll \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
donne $\frac{c^2}{4r^2}.u \ll \frac{u}{T^2}$ soit $r^2 \gg c^2.T^2 = \lambda^2$ le terme est bien négligeable si $r \gg \lambda$
IV.C.3. Les solutions en u de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$ sont donc de la forme : $u = u_+(r-ct) + u_-(r+ct)$ où u_+ est associé à une onde divergente ($r \nearrow$) et u_- à une onde convergente ($r \searrow$).
Soit $\varphi(r,t) = \frac{u_+(r-ct)}{\sqrt{r}} + \frac{u_-(r+ct)}{\sqrt{r}}$
IV.C.4.a. Avec la relation sur u, on en tire directement $k = \frac{\omega}{c}$. c'est la relation de dispersion du milieu. On en tire la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$ Le milieu n'est donc pas dispersif.
IV.C.4.b. $p(M,t) = \mu g\frac{U_0}{\sqrt{r}}cos(\omega t - k.r)$
et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g.\overrightarrow{grad}\varphi = -g.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_0}{\sqrt{r}}.cos(\omega t - k.r)\right).\vec{e}_r$
soit $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\frac{gU_0}{2r^{3/2}}.cos(\omega t - k.r) - \frac{gkU_0}{\sqrt{r}}.sin(\omega t - k.r)\right).\vec{e}_r$
d'où $\vec{v} = \left(\frac{gU_0}{2\omega r^{3/2}}.sin(\omega t - k.r) + \frac{gkU_0}{\omega\sqrt{r}}.cos(\omega t - k.r)\right).\vec{e}_r$ la constante d'intégration est une fonction indépendante du temps, elle ne représente pas une grandeur liée à l'onde progressive cylindrique, on la choisit nulle.
Le premier terme décroît en 1/r par rapport au second, il est donc négligeable et avec $k = \frac{\omega}{c}$
$\vec{v} \approx \frac{gU_0}{c\sqrt{r}}.cos(\omega t - k.r).\vec{e}_r$
IV.C.5.a. $d\vec{F} = p(M,t).rd\theta dz.\vec{e}_r$
La puissance mécanique élémentaire est $dP = d\vec{F}.\vec{v} = p(M,t).\vec{v}.rd\theta dz.\vec{e}_r = p(M,t).\vec{v}.d\vec{S}$

Soit $\overrightarrow{\Pi} = p(M,t).\vec{v} = \mu g \frac{U_0}{\sqrt{r}} cos(\omega t - k.r).\frac{gU_0}{c\sqrt{r}}.cos(\omega t - k.r).\vec{e}_r = \frac{\mu g^2 U_0^2}{cr} cos^2(\omega t - k.r).\vec{e}_r.$

IV.C.5.b. On moyenne sur le temps : $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{\mu g^2 U_0^2}{2cr}.\vec{e}_r$

Et $\langle P\rangle = \iint \langle\overrightarrow{\Pi}\rangle.d\vec{S} = \iint_{cylindre} \frac{\mu g^2 U_0^2}{2cr}.rd\theta dz = \mu g^2 U_0^2 H\pi = \pi\mu g c U_0^2$

La puissance ne dépend pas de r car le milieu n'est pas absorbant.

IV.C.5.c. $\varphi_0 = \frac{U_0}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{\langle P\rangle}{\pi\mu g c r}}$ or $c = \sqrt{Hg}$ donc $\varphi_0 = \sqrt{\frac{\langle P\rangle}{\pi\mu g\sqrt{Hg}r}}$

IV.C.5.d. Le flux reste constant, la hauteur d'eau reste la même par rapport au fond.

Si $H \searrow$ alors $\varphi_0 \nearrow$ la vague prend une amplitude plus grande.