Chapitre 21 : Variables aléatoires : couple, indépendance, compléments

1 Couples de variables aléatoires

1.1 Préambule, exemples

On va introduire les notions du chapitre en s'appuyant sur 2 exemples.

Exemple 1 :
On lance un dé a trois faces équilibré. On note X le résultat.
Ensuite, on lance un dé équilibré à X faces et on note Y le résultat.

X suit une loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$, Y suit une loi uniforme sur $[\![1;X]\!]$.

(X,Y) prend ses valeurs dans $\Omega_0 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.
X prend ses valeurs dans $\Omega_X = [\![1;3]\!]$, Y prend ses valeurs dans $\Omega_Y = [\![1;3]\!]$

On va considérer (X,Y) comme une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un univers plus large que Ω_0 puisque l'on va considérer $\Omega = [\![1;3]\!]^2 = \Omega_X \times \Omega_Y$

On peut représenter ceci sous forme de tableau à double entrée ou sous forme de graphique. On va essayer de compléter ce tableau avec les valeurs des probabilités : $P(X = j \cap Y = k)$ pour $(j,k) \in [\![1..3]\!]^2$

$X \backslash Y$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=1$			
$X=2$			
$X=3$			

On peut déjà remarquer que l'on connaît :
$P(X = 1 \cap Y = 2) = P(X = 2 \cap Y = 3) = 0$

On peut alors essayer de déterminer les lois de X et Y(on s'intéresse à 2 variables aléatoires) mais aussi la loi de (X,Y) (on s'intéresse à une seule variable aléatoire mais à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

On va préciser tout çà dans le paragraphe suivant.

Exemple 2 :
On considère une grenouille qui pond X œufs, avec X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Chaque œuf, a, indépendamment des autres, une probabilité $p \in]0,1[$ d'éclore et de donner un têtard.
On note Y le nombre de têtards.

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On s'intéressera aux loi de X, Y, (X,Y) ...

1.2 Couple de variables aléatoires

1.2.1 Définition

Définition. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.*
Soit X une variable aléatoire discrète de Ω dans E et Y une variable aléatoire discrète de Ω dans F.

On appelle **couple de variables aléatoires** *la variable aléatoire $Z = (X,Y)$ définie par*

$$Z \; : \; \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \mapsto & Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Remarque. *On peut aussi dire, plus simplement qu'un couple de variables aléatoires réelles est la donnée de deux variables aléatoires réelles X et Y sur Ω.*

1.2.2 Système complet d'événements

Propriété. *L'ensemble des événements*
$\{(X = x) \cap (Y = y)\}$ **avec** $x \in X(\Omega)$ **et** $y \in Y(\Omega)$
forme un système complet d'événements sur Ω

Remarques. *L'ensemble des éléments de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est dénombrable comme produit cartésien de deux ensembles dénombrables.*
C'est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire (X, Y).
On va procéder en donnant la probabilité de chacune des valeurs du couple (X, Y). (même si, comme dans l'exemple, certaines valeurs son nulles, on préfère un univers plus large).

1.3 Loi du couple ou loi conjointe

1.3.1 Définition

Définition. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ au plus dénombrable.*
On appelle **loi conjointe** *de X et de Y la loi du couple (X, Y).*

1.3.2 Lemme

Lemme. *La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires (X, Y) définit*
une probabilité sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

preuve : (rappel)

1.3.3 Proposition

Propriété. *La loi de (X, Y) est donnée par la famille des réels :*

$$P((X = x) \cap (Y = y)) \textbf{ pour } (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

Remarque. *On note souvent :*

$$P(X = x, Y = y) = P((X = x) \cap (Y = y))$$

1.3.4 Retour sur l'exemple 1

Détermination de la loi conjointe.

A partir de ce tableau, on peut obtenir la loi de X et la loi de Y, on peut remarquer que la connaissance de ses lois ne permet pas de connaître la loi de (X, Y). On les qualifies de "marginales".

1.4 Lois marginales

1.4.1 Définitions

Définitions. *On appelle* **lois marginales du couple** (X, Y) *les lois des variables aléatoires X et Y.*
La loi de X est appelé première loi marginale du couple et celle de Y deuxième loi marginale du couple.

1.4.2 Théorème

Théorème . *D'après la formule des probabilités totales, les lois marginales sont données par :*

$$\forall x \in X(\Omega)\ ,\ P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

$$\textbf{et } \forall y \in Y(\Omega)\ ,\ P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))$$

Remarque. *La donnée des lois de X et de Y ne permet pas, en général, de connaître la loi de (X, Y).*

preuve :

1.5 Lois conditionnelles

1.5.1 Remarque

Remarque. *On a vu que les probabilités conditionnelles nous ont permis de remplir notre tableau ci-dessus, elles jouent ici un rôle clé.*

1.5.2 Définitions

Définitions. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé au plus dénombrable $(\Omega, \mathscr{A}, p)$. Pour tout y de $Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y) \neq 0$ la loi de X sachant $(Y=y)$ est la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P_{(Y=y)})$ et elle est déterminée par la famille des réels :* $P_{(Y=y)}(X=x)$ **lorsque** x **décrit** $X(\Omega)$

De même, pour tout x de $X(\Omega)$ tel que $P(X=x) \neq 0$ la loi de Y sachant $(X=x)$ est la loi de Y dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, p_{(X=x)})$ et elle est déterminée par la famille des réels : $P_{(X=x)}(Y=y)$ **lorsque** y **décrit** $Y(\Omega)$

Remarque. *On peut, de la même manière définit la loi conditionnelle de X sachant un événement A quelconque.*

1.5.3 Propriété

Propriété. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, p)$.*
On suppose que $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$
$P(X=x) \neq 0$, $P(Y=y) \neq 0$.

Alors $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P((X=x) \cap (Y=y)) = P(Y=y)P(X=x|Y=y) = P(X=x)P(Y=y|X=x)$$

$$P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y)P(X=x|Y=y)$$

$$P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=y|X=x)$$

Remarque. *On remarque que les dénominateurs sont non nulles.*

preuve :

1.5.4 Retour sur l'exemple 2

2 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

2.1 Préambule

Dire que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes c'est préciser que la connaissance de l'une n'apporte pas d'information sur la connaissance de l'autre.
Autrement dit que la loi de Y sachant $(X=x)$ ne dépend pas de l'événement $(X=x)$, ce qui se traduit en calcul par : $P_{(X=x)}(Y=y) = P(Y=y)$ ce qui entraîne $P((X=x) \cap (Y=y)) = P(X=x)P(Y=y)$

2.2 Définition

Définition. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et (X,Y) un couple de variables aléatoires sur cet espace. Alors, on dit que* X **et** Y **sont indépendantes**
si et seulement si $\forall A \subset X(\Omega)$, $\forall B \subset Y(\Omega)$ les événements $(X \in A)$ **et** $(Y \in B)$ **sont indépendants.**
On note ceci : $X \coprod Y$.

Remarque. *Les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants signifie que*
$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$

2.3 Propriété

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes sur un univers probabilisé au plus dénombrables $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ si et seulement si $\forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$
$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

preuve :

Remarques. *On utilise le plus souvent cette caractérisation.*
Dans le cas $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ fini, lorsque X et Y sont indépendantes les colonnes (ou les lignes) de la matrice du tableau de la loi mutuelle sont proportionnelles.
Autrement dit la matrice des coefficients $P((X = x) \cap (Y = y))$ est de rang 1.
La dépendance ne dépend pas de l'expérience aléatoire mais surtout de la probabilité choisie.

2.4 Image par des fonctions

Lemme. *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. Soit f et g deux fonctions telle que $f(X)$ et $g(Y)$ soit définies. Alors :* $X \coprod Y \Rightarrow f(X) \coprod g(Y)$

preuve : admis

3 Covariance de deux variables aléatoires discrètes réelles

3.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème . *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, telle que X^2 et Y^2 soient* **d'espérance finie.**
Alors : XY est aussi d'espérance finie et : $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$
Avec égalité si et seulement si $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$, $P(aX + bY = 0) = 1$

preuve :

3.2 Covariance

Définition. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, telle que X^2 et Y^2 soient d'espérance finie. Alors, on appelle* **covariance de X et Y** *le réel :* $cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$.

Remarques. *La covariance permet de mesurer la dépendance de X et de Y.*
$cov(X, X) = V(X)$

Lemme. *Avec les notations ci-dessus :* $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Remarque. *C'est ce dernier lemme qui, rapproché à l'inégalité de Cauchy-Schwarz précédente, permet de voir que la covariance permet de mesurer la dépendance linaire de X et Y.*
Le coefficient de corrélation $\rho(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1; 1]$ a plus de sens mais il est hors programme.

preuve :

3.3 Premières propriété

Théorème . *Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes réelles* **indépendantes alors** $cov(X, Y) = 0$ **et** $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

preuve : H-P

Remarque. *Attention, réciproque fausse !*

Exemple. *Par exemple X et Y avec $Y = X^2$ et X donnée par* $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$ *et* $P(X = 0) = \frac{1}{2}$

3.4 Propriétés type "produit scalaire"

Propriétés. *Soit X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes réelles dont le carré admet une espérance. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

1. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
2. $cov(aX+bY,Z) = acov(X,Z) + bcov(Y,Z)$
3. $cov(Z,aX+bY) = acov(Z,X) + bcov(Z,Y)$
4. $cov(X,X) \geq 0$

Remarque. *On dit que cov est une forme bilinéaire symétrique.*
Par rapport à un produit scalaire, il manque $cov(X,X) = 0 \Rightarrow X = 0$.
On a en fait $cov(X,X) = 0 \Rightarrow P(X = E(X)) = 1$

preuve :

3.5 Relations polaires

Propriétés. *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles dont le carré admet une espérance. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :*

1. $\mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2abcov(X,Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$
2. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2cov(X,Y)$
3. $\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2cov(X,Y)$
4. $cov(X,Y) = \frac{1}{4}(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X-Y))$
5. *cov(X,X)=V(X)*

preuve :

Corollaire. *Si X et Y sont indépendantes alors* $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

preuve :

4 n-uplet de variables aléatoires

4.1 Généralisation

Définition. *Soit $X_1 : \Omega \longrightarrow E_1$, $X_2 : \Omega \longrightarrow E_2$, $\dots$, $X_n : \Omega \longrightarrow E_n$ des variables aléatoires discrètes.*
*Alors l'application qui à $\omega \in \Omega$ associe le vecteur $(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$ est appelée **n-uplet de variables aléatoires***

Remarque. *Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}$ alors $(X_1, \dots, X_n)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et on parle de vecteur aléatoire.*

Définitions. *La loi* **conjointe** *de $X_1, X_2, .., X_n$ est la loi du n-uplet $(X_1, X_2, .., X_n)$.*
Les lois **marginales** *sont les lois des variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n$.*

4.2 Indépendances

Définition. *1*
Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, ..., X_n$ sont dites **indépendantes deux à deux** *si et seulement si pour tout i, j distincts de $[\![1..n]\!]$, X_i et X_j sont indépendantes.*

Définition. *2*
Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, ..., X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** *si et seulement si $\forall (A_1, A_2, ..., A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \mathscr{P}(X_2(\Omega)) \times ... \times \mathscr{P}(X_n(\Omega))$ les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.*

Proposition. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors :*
$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$
$P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i = x_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$

preuve : HP

4.3 Lemme des coalitions

Lemme. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors :*
$f(X_1, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont **indépendantes.**

preuve : HP

Remarque. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors :*
$f(X_1, ..., X_p)$, $g(X_{p+1}, ..., X_q)$ et $h(X_{q+1}, ..., X_n)$sont **indépendantes.**

4.4 Suite de variables aléatoires

4.4.1 Définition

Définition. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes.*
On dit que cette suite est **une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes** *si pour tout sous-ensemble I fini non vide de $\mathbb{N}$ les variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.*

Lemme. *Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires discrètes réelles mutuellement indépendantes alors :*

$$\mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n} X_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

preuve :

4.4.2 Suites i.i.d.

Définition. *On appelle suite de variables aléatoires* **i.i.d. une suite de variables indépendantes suivant la même loi.**

Remarques. *i.i.d. = indépendantes identiquement distribuées.*
Le programme demande de ne pas soulever de difficultés théoriques sur ce point.

4.5 Somme de variables aléatoires discrètes indépendantes

4.5.1 Variance d'une somme de variables aléatoires indépendants réelles

Théorème . *Soit $(X_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.*
Alors $\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$

preuve :

4.5.2 Fonction génératrices

Théorème . *Soit X et Y deuxs variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
On note G_X la fonction génératrice de X, R_X son rayon de convergence, G_Y la fonction génératrice de Y, R_Y son rayon de convergence, et G_{X+Y} la fonction génératrice de $X+Y$, R_{X+Y} son rayon de convergence.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$
$|t| < Min(R_X, R_Y) \Rightarrow G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ **et** $R_{X+Y} \geq Min(R_X, R_Y)$

preuve :

Théorème . *Généralisation*
Soit $(X_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note G_{X_k} la fonction génératrice de X_k, R_{X_k} son rayon de convergence et G_Z la fonction génératrice de $Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$
$|t| < Min(R_{X_k}, k \in [\![1;n]\!]) \Rightarrow G_Z(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$

preuve :

4.5.3 Somme de variables aléatoire discrètes indépendantes suivant des lois de Bernoulli

Théorème . *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables discrètes aléatoires i.i.d. suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p*
alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ **suit une loi binomiale de paramètre (n, p).**

preuve :

4.6 Loi faible des grands nombres

4.6.1 Théorème

Théorème . Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires discrète de variance finie, alors en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathbb{E}(X_1)$, on a pour tout $\epsilon > 0$: $P(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

preuve :

Sommaire