Feuille d'exercices posés aux oraux 2022 aux élèves de PSI* de La-Fayette

Planche 1. ccINP

Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $\begin{array}{cccc} f_A & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & AM \end{array}$

a) Montrer que f_A est un endomorphisme.
b) Montrer que si $A = A^2$ alors f_A est un projecteur.
c) Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable
d) Montrer que : A et f_A ont même spectre.

Exercice 2

On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotés de 1 à n indiscernables au toucher. On tire deux boules simultanément et on note X le plus petit tirage et Y le plus grand.
a) Calculer pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ la valeur $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$
b) Déterminer les lois marginales de X et Y.
c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y.
d) Calculer $\mathbb{E}(Y(Y - 1))$
e) Déterminer $\mathbb{V}(Y)$ la variance de Y.

Planche 2. Télécom

Exercice 1

On pose $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Déterminer la nature de $\sum \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 2

A base d'une matrice 5×5 ...

Planche 3. CCINP

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Quelles sont les valeurs propres de A *?*

b) A *est-elle diagonalisable ?*

c) Trouver deux vecteurs propres u *et* v *de* A*, et un vecteur* w*, tels que* (u, v, w) *soit une base.*

d) Montrer que A *est trigonalisable.*

Exercice 2

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in I =]0, +\infty[$, $f_n(t) = \frac{1}{sh(nt)}$ *et* $F(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$

a) Déterminer le domaine de définition D *de* F

b) Montrer que F *est de classe* C^1 *sur* I *et en déduire les variations de* F*.*

c) Déterminer les limites de F *aux bornes de* I*.*

Planche 4. CCINP

Exercice 1

Soit E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geq 2$

Soit $u \in L(E)$*. On note* $Z_u = \{v \in L(E) \ , \ u \circ v = v \circ u\}$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ *on pose* $E_\lambda = ker(u - \lambda Id_E)$

On suppose que u *admet* n *valeurs propres distinctes.*

1) Montrer que Z_u *est un espace vectoriel.*

2) Montrer que, pour $v \in Z_u$*,* E_λ *est stable par* v*.*

3) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de u*.*

4) Montrer que si $v \in Z_u$*, alors tout vecteurs proprés de* u *est aussi vecteurs propres de* v*.*

5) Montrer qu'il existe une base B *de* E *telle que,* $\forall v \in L(E)$ *:*

$v \in Z_u \Leftrightarrow M_B(v)$ *est diagonale.*

6) En déduire la dimension de Z_u*.*

7) Montrer que la famille $(Id_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ *libre dans* $L(E)$ *et en déduire une base de* Z_u*.*

Exercice 2

Soit $f : t \mapsto ln(t)e^t$*.*

a) Montrer que f *est intégrable sur* $]0, 1]$

b) Démontrer que : $\int\limits_0^1 ln(t)e^t dt = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$

Planche 5. Mines-Télécom

Exercice 1

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *des réels deux à deux distincts.*
1) Soit les polynômes définis par : $\forall i \in [\![0;n]\!]\ ,\ Q_i(X) = (X+a_i)^n$
Montrer que la famille $(Q_0, \ldots, Q_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$

2) ? ? ? ?

Exercice 2

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ *on pose* $F : x \mapsto \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t\arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt$
1) Justifier l'existence de $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t\arctan(t)}{(1+t^2)^2} dt$
2) Montrer que F *est de classe* C^∞ *sur* $]0,+\infty[$ *et donner une expression de* F'.
3) Déterminer alors la valeurs de I.

Planche 6. ccINP
Exercice 1

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $f^3 = Id_{\mathbb{R}^3}$ *et* $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$
1) Montrer que 1 *est valeur propre de* f.
2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus ker(f^2 + f + Id_{\mathbb{R}^3})$
3) Montrer que f *est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit une urne avec a *boules blanches et* b *boules noires. On tire successivement* n *boules, avec remise à chaque tirage, de manière équiprobable.*
Pour $i \in [\![0;n]\!]$, *on note* B_i *l'événement : "*i *boules blanches ont été tirées".*
1) Calculer la probabilité de l'événement B_i.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}$
3) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de boules blanches ?

Planche 7. ccINP
Exercice 1

Soit $p \in]0,1[$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre* p.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ Y_n = X_n + X_{n+1}$ *et* $M_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n}$
1) Enoncer la loi faible des grands nombres.
2) Les variables aléatoires Y_n *sont-elles mutuellement indépendantes ?*
3) Déterminer l'espérance et la variance de M_n.
4) (?) Soit $\epsilon > 0$, *montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - 2p| \geq \epsilon) = 0$

Exercice 2

Soit le système différentiel $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$

1) Ecrire (S) *sous forme matricielle.*
2) Diagonaliser la matrice trouvée en 1).
3) Résoudre (S)

Planche 8. ccINP
Exercice 1

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définit par* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in [0, +\infty[\ ,\ f_n(x) = xexp(-\sqrt{nx})$.
a) La suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle simplement ?*
b) Calculer $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$
Que peut-on en déduire sur la suite (f_n)
c) Soit la série de fonctions $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
Cette série de fonctions convergent-elle simplement ? uniformément ? normalement ? sur quel intervalle ?

Exercice 2

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que* $A \neq I_2$ *et* $A^2 = A^T$
1) Trouver un polynôme annulateur de A.
2) Montrer que les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A. Que dire de $sp(A)$ *?*
3) Montrer que A est une matrice orthogonale.
4) Déterminer $det(A)$.
5) Trouver toutes les matrices A possibles.

Planche 9. ccINP
Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n} \end{cases}$

1) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$
2) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} nu_n$
3) Nature de $\sum u_n$ *et de* $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 2

?

Planche 10. ccINP

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

2) Trouver une équivalent de $u_n = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

3) Soit G_X la fonction génératrice de X. Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$

4) Calculer la probabilité que X soit paire.

5) Soi Y une variable aléatoire indépendante de X, suivant une loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$

Calculer la probabilité que XY soit paire.

Exercice 2

Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien.Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E telle que :

$\forall x \in E\ ,\ ||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} < x, e_i >^2$

1) Montrer que : $\forall j \in [\![1;n]\!]\ ,\ ||e_j|| \leq 1$

2) Soit x un vecteur unitaire orthogonale $vect(e_1, \ldots, e_{n-1})$

Calculer $< x, e_n >^2$ et en déduire $||e_n||^2$

3) En déduire que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Planche 11. ccINP

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^n$ que l'on muni du produit scalaire canonique.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme admettant A comme matrice relativement à la base canonique de E et w l'endomorphisme admettant A^T comme matrice relativement à la base canonique de E.

1) Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2\ ,\ < u(x), y >) =< x, w(y) >$

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par w.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer le polynôme caractéristique de A^T.

A et A^T sont-elles diagonalisables ?

4) Trouver les sous-espaces vectoriels stables par u.

Exercice 2

Justifier l'existence des deux termes de l'égalité : $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{sh(x)} dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Montrer cette égalité.

Planche 12. ccINP
Exercice 1
On considère une urne avec boules, indiscernable au touché, numérotées de 1 à 3.
On effectue une suite de tirages avec remise (indépendants).
Y est la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 numéros différents.
Z est la variable aléatoire associée au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 numéros.
1) Déterminer la loi de Y
2) Identifier la loi de $Y-1$ et en déduire l'espérance et la variance de Y.
3) Déterminer la loi du couple (Y,Z).
4) Déterminer la loi de Z et l'espérance de Z.

Exercice 2
On considère $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} sin(xt)dt$

1) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) En déduire $\varphi'(x)$ et exprimer $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Planche 13. Mines-Ponts
Exercice 1 *(15 minutes de préparation, 40 minutes de passage)*
1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Est-ce que $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n^2$ converge ?
Si ce n'est pas le cas, trouvez un contre exemple.
2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n = o(b_n)$
Est-ce que $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge ?
Si ce n'est pas les cas trouver un contre-exemple.
3) Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.
a) Que dire de $E = \{t \in \mathbb{R},\ e^{tX}$ admet une espérance $\}$
b) Trouver une variable aléatoire X telle que $E = \mathbb{R}^-$ et telle que $t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ soit C^1 sur E.

Exercice 2 *(pas de préparation, 15 minutes de passage, l'exercice est donné à la fin du passage du premier)*
Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$
On s'intéresse dans cet exercice à une notion hors programme : les endomorphismes antisymétriques. On notera $A(E)$ l'ensemble de ces endomorphismes et on a, pour $f \in L(E)$:
$f \in A(E) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2\ ,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >$
1) Dans cette question E est de dimension 2.
Démontrer que $det(f) \geq 0$
2) Dans cette question E est de dimension 4.
On suppose que f admet un plan stable P, on notera f' l'endomorphisme induit par f sur P.
a) Que dire de $det(f')$?
b) Que dire de $det(f)$?
3) Soit $\lambda \in sp(f)$. Montrer que $\lambda = 0$.
4) Montrer que si f admet une valeur propre complexe non réelle, alors f admet un plan stable.
5) Montrer que si $dim(E)$ est paire alors $det(f) \geq 0$
6) Que dire de $det(f)$ si $dim(E)$ est impaire ?