Feuille d'exercices posés aux oraux blancs PSI* 2024 par Mr Danflous

1 Antoine

EXERCICE 1

Soit $p \in]0,1[$. Trois clients A_1, A_2 et A_3 entrent dans un bureau de poste désert ayant exactement 2 guichets. Les clients A_1 et A_2 accèdent directement au guichet et A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini d'être servi avant d'accéder au guichet. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associées aux temps de service de chacun des clients et on suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_i = k) = (1-p)p^k.$$

On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.

On note Y la variable aléatoire associée à la première sortie du bureau de poste (i.e. le moment où A_3 accède au guichet) et Z le moment où A_3 sort du bureau de poste.

1) Déterminer la fonction de répartition de Y et en donner sa loi.

2) Exprimer Z en fonction de Y et de A_3. En déduire la loi de Z.

3) Calculer le temps moyen entre l'entrée A_3 et sa sortie du bureau de poste.

EXERCICE 2

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$

1) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

2) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$, avec $r > 0$.
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité de D de ce développement en série entière.

---

2 Jade

EXERCICE 1

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

1) Déterminer l'intervalle de définition de f.

2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3) Soit $x > 0$. Calculer $f(x-1) - f(x)$

4) En déduire une expression de f sous la forme d'une somme de série de fonctions.

5) Trouver une autre méthode pour obtenir ce résultat.

EXERCICE 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1) Déterminer une base $Ker(f)$.

2) f est-il surjectif ?

3) Déterminer une base de $Im(f)$.

4) A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = ker(f) \oplus Im(f)$?

---

3 Robin

EXERCICE 1

On note $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à diagonales propres, i.e. dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres comptées avec leur multiplicité.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle dans $\mathcal{E}_3$?

2) Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Montrer qu'il existe $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$.

c) En remarquant que ${}^tAA$ est symétrique, montrer que, en calculant $({}^tAA)^p$, alors $A = 0$.

3) Calculer la dimension de l'espace vectoriel $_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

a) Montrer que, pour si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{E}_n$, alors $\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel $F \subset \mathcal{E}_n$ tel que $\dim F = \frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 2

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{\sim}{+\infty} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$ de :

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$$

---

4 Louis

EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

2) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A.

3) On suppose que A est diagonalisable. La matrice B est-elle diagonalisable ? Que dire des valeurs propres de B.

EXERCICE 2

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \,]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

---

5 Ulysse

EXERCICE 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1}{\cosh(t)^n}$.

1) Étudier la convergence de $\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

2) Étudier le comportement asymptotique de la suite (a_n) et préciser la valeur de sa limite éventuelle.

3) Étudier la convergence de $\sum(-1)^n a_n$ puis de $\sum a_n$.

4) Étudier le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

EXERCICE 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que $E = Im(f) \oplus Ker(f) \Rightarrow \Longrightarrow \Im(f) = Im(f^2)$.

2) a) Démontrer que $Im(f) = Im(f^2) \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)$
2) b) Démontrer que $Im(f) = Im(f^2) \Rightarrow Im(f) \oplus Ker(f)$

---

6 Alexandre G.

EXERCICE 1

On considère l'équation $x''' - 5x'' + 7x' - 3x = 0$.

1) Montrer que x est solution de cette équation si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel $X' = AX$ où A est une matrice à déterminer.

2) Déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

3) Résoudre l'équation.

EXERCICE 2

E et F désignent deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

On note $||\cdot||_E$ (respectivement $||\cdot||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1 f est continue sur E.
P2 f est continue en 0_E.
P3 $\exists k > 0, \forall x \in E,\ ||f(x)||_F \leq k\,||x||_E$.

2) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

---

7 Simon V.

EXERCICE 1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

1) Étudier la continuité de f.

2) Calculer les dérivées partielles de f.

3) La fonction f est-elle de classe C^1.

4) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en concluez-vous ?

EXERCICE 2

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Montrer que si $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$deg(P) \leq n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!] \ , \ P(a_i) = b_i$$

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$

3) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 2 Bis (seul celui-ci a été donné)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal (polynôme annulateur de A unitaire et de plus petit degré) de A.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

---

8 Flavien

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le noyau de f et en déduire une propriété de f.

2) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

3) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

4) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

5) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

2) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N}(X_i)$ c'est-à-dire :
$\forall \omega \in \Omega \ , \ Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant le « plus petit élément de ».

2)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y = n)$.
En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.

2)b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
