Feuille d'exercices posés aux oraux blancs PSI* 2024 par Mr Charitat, série 1

Planche 1 (Max)

Exercice 1

Pour p et n entiers naturels, on définit $f_{n,p}(t) = t^n(ln(t))^p$

On pose $\phi(t) = t^t$ si $t \in]0,1]$ et $I = \int_0^1 \phi(t)dt$

a) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^n}$ est convergente.
b) Montrer que l'intégrale I est bien définie.
c) Montrer que $\int_0^1 f_{n,p}(t)dt$ est bien définie et la calculer.
d) Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = M_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E$, $u(M) = aM + bM^T$
1) Montrez que u est un endomorphisme.
2) Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.
3) Calculez $tr(u)$ et $det(u)$.

Exo 1
a) Pour $n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$
c) Si on pose $I_{n,p} = \int_0^1 f_{n,p}(t)dt$ alors, par IPP, $I_{n,p} = \frac{-p}{n+1} I_{n,p-1}$ et donc $I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}$
d) Théorème d'intégration terme à terme

Exo 2
$E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ ...
$tr(u) = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b)$

Planche 2 (Maxime L.)

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in (0, +\infty[$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

d) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice 2

A) Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{R}^{2n}$. Soit $u \in L(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0_E$ et $rg(u) = n$.

a) Montrer que $Ker(u) = Im(u)$

b) Montrer qu'il existe une base B de E telle que la matrice de u relativement à B soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$

B) Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{R}^{3n}$. Soit $u \in L(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0_E$ et $rg(u) = 2n$.

a) Montrer que $Ker(u) = Im(u^2)$

b) Montrer qu'il existe une base B de E telle que la matrice de u relativement à B soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$

Exo 1

Exo 2
