Feuille d'exercices posés aux oraux blancs PSI* 2024 par Mr Charitat, série 2

Planche 3 (William et Océane)

Exercice 1

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ln(1 + e^{-nx})$

a) Donner le domaine de définition D de f.
b) f est-elle continue sur D ?
c) Montrer que f est décroissante sur D.
d) Déterminer la limite de f en $+\infty$
e) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $inf(D)$
d) Déterminer f(D).

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et s est une symétrie vectorielle.
On pose pour $u \in L(E)$, $g(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$
a) Montrer que g est un endomorphisme de $L(E)$.
b) Calculer g^3 et en déduire un polynôme annulateur de g.
c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Planche 4 (Maéva et Alexandre)

Exercice 1

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

a) Etude d'un exemple : dans ce a) uniquement $A = I_n$. Calculer B^2. B est-elle diagonalisable ? Quel est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ associé à B.
b) Déterminer $rg(B)$ en fonction de $rg(A)$.
c) Déterminer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.
d) Quel lien existe-t-il entre $sp(B)$ et $sp(A)$?
e) Si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes, montrer que B est diagonalisable.
f) Est-ce encore vraie si A est non inversible et diagonalisable ?

Exercice 2

a) Montrer que pour tout x dans un domaine D à préciser, on a $tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$
b) Montrer que : $\frac{\pi}{8} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$