Feuille d'exercices posés aux oraux blancs PSI* 2024 par Mr Charitat, série 3

Planche 4 (Mathieu, Maxime S.) : Centrale Mathématiques 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Déterminez une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont exactement les racines troisièmes de l'unité.

2) On suppose dans cette question que 1 n'est pas valeur propre de A.
(i) Montrez que l'entier n est pair.
(ii) Exprimez A^2 à l'aide de A et I_n.
(iii)Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

3) Dans cette question : on suppose que 1 est valeur propre de A.
Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Planche 5 (Matéo) : Mines-Télécom

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$
Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2

1) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle : $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2x$

2) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Planche 6 (Alexandre V.) : ccINP

Exercice 1

1. Trouver des réels a, b, c tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \qquad \frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

2. Résoudre sur $]1,+\infty[$, puis sur $]0,1[$, puis sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$t(t^2-1)x'(t) + 2x(t) = t^2$$

Exercice 2

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E.

Soient n vecteurs $u_1,\dots,u_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 < 1$.

1. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\displaystyle\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2\right)$
2. Montrer que $(e_i + u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

Planche 7 (Maéva) : Mines-Télécom

Exercice 1

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et u une isométrie vectorielle de E.
a) Montrer que $sp(u) \subset \{-1,1\}$

b) On suppose que la matrice de u relativement à la base orthonormée (i,j,k) de E est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de u.

Exercice 2

a) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow ty'(t) - y(t) = -1$

On pose $\Omega =]0,+\infty[^2$ et on considère l'équation aux dérivées partielles :
$(F) \Leftrightarrow 1 + x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = 0$

b) Montrer que $h : (x,y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2+y^2}$ est solution de (F) sur Ω.

c) Soit f une solution de (F). On pose $g(r,\theta) = f(rcos(\theta), rsin(\theta))$

Montrer que g est solution de $(G) \Leftrightarrow 1 + r\frac{\partial g}{\partial r} - g = 0$

d) Résoudre (G) puis (F).

Planche 8 (Maxime L.) : Centrale Mathématiques 1

Soit $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^{-nt^2}}{n^2} \end{array}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\sum g_n$ converge.

   On note $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$.

2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ converge.

   On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2} \end{array}$.

   Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.