Cooorection des exercices (du site) de Mathématiques 1, Centrale PSI

Exercice A

1.) D'après le cours : $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ converge simplement vers g sur $]-R,R[$ et converge normalement, et donc uniformément, vers g sur tout segment inclus dans $]-R,R[$

2.) Soit $n \geq 1$. On va particulariser l'élément $n+1$ de $[\![1;n+1]\!]$.
Si $U_1, U_2, \ldots, U_r$ est une partition de $[\![1;n+1]\!]$, quitte à renuméroter les U_i on peut supposer que $n+1 \in U_1$ et on a alors $U_2, U_2, \ldots, U_r$ qui est une partition de $[\![1;n+1]\!]\backslash U_1$
On classe les partitions de $[\![1;n+1[\![$ selon $k+1$ le nombre d'élément (k compte tout les éléments de cette partie sauf $n+1$), de la partie contenant $n+1$.
Pour trouver une telle partition il faut choisir k éléments de $[\![1;n]\!]$, il y a donc $\binom{n}{k}$ parties de cette forme.
Ensuite pour finir la partition de $[\![1;n+1]\!]$ il faut faire une partition des $n+1-(k+1) = n-k$ éléments restants.
Il y a alors p_{n-k} possibilités.
On a donc $\binom{n}{k} p_{n-k}$ partitions de $[\![1;n+1]\!]$ tel que $n+1$ appartiennent à une partie contenant $k+1$ éléments.
On a donc $p_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-k}$. On pose $K = n-k$: $p_{n+1} = \sum\limits_{K=0}^{n} \binom{n}{n-K} p_K$ et donc finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ p_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k}$

3.a) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ p_n \leq n!$
Au rang $n = 0$: $p_0 = 1 \leq 0!$, c'est bon.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n et montrons la au rang $n+1$.
Avec la relation de 2.) $p_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} k! \leq n! \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1} \leq n! \sum\limits_{k=0}^{n} 1 \leq n!(n+1) = (n+1)!$

On a donc la relation voulue au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ p_n \leq n!$ et donc $0 \leq \frac{p_n}{n!} \leq 1$ et comme $\sum x^n$ a pour rayon de convegence 1 (d'après le cours), alors par comparaison : $\boxed{R \geq 1}$

3.b) Pour $n \geq 0$, $\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} p_k \Rightarrow \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{p_k}{k!}$

On multiplie par $x \in]-1,1[$ pour être sûr que la série converge et on somme de $n=0$ à $+\infty$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)} \frac{p_k}{k!}] x^{n+1} \Rightarrow f(x) - 1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)} \frac{p_k}{k!}] x^{n+1}$

On peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence et on obtient :
$f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)} \frac{p_k}{k!} x^n$
On reconnaît alors un produit de Cauchy de $f(x)$ par $exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$
On en déduit : $f'(x) = exp(x) f(x)$

On a alors une équation différentielle homogène d'ordre 1 à coefficients continues que l'on peut résoudre avec le cours. Comme $\int exp(x)dx = exp(x)$ alors $\exists A \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = A exp(exp(x))$.
Mais $f(0) = p_0 = 1$ donc $Ae = 1$ et donc $\boxed{f(x) = \frac{exp(exp(x))}{e}}$

Remarque : au voisinage de 0 : $f(x) = e(1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + o(x^4))$
et donc $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 15$ ...

On peut aussi remarquer que $R = +\infty$

Exercice B

1.) Si on sait que $N = n_0$, on lance n fois une pièce équilibrée de manière indépendante et on compte le nombre de Pile (succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$), on reconnaît alors la situation type d'une loi binomiale (cours).

$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X \text{ sachant } \{N = n_0\} \text{ est une loi binomiale de paramètre } (n_0, \frac{1}{2})}$

2.a) et b) On sait d'après le cours que : $\forall x \in]-1, 1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

On peut dériver k fois une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence en conservant le rayon de convergence.

On a : $\frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ et pour $n \geq k$, $\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Donc, pour $x \in]-1, 1[$: $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}$

$\Rightarrow \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$

On en déduit : $\boxed{R = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in]-1, 1[\ ,\ f(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}}$

2.c) On remarque que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on a :

$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k \cap N = n)$

Mais $P(X = k \cap N = n) = 0$ si $n < k$ car on ne peut pas obtenir k pile si on effectue moins de k lancers.
On va traiter le cas $k \geq 1$ et on traitera le cas $k = 0$ ensuite.

Donc si $k \geq 1$: $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k | N = n) P(N = n)$

En utilisant le 1.) et le fait que $N \hookrightarrow G(p)$:
$P(X = k)$
$= \sum_{n=k}^{+\infty} [\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n][(1-p)^{n-1}p] = \frac{p}{1-p} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(\frac{1-p}{2})^n$

En utilisant le 2.b) puisque $\frac{1-p}{2} \in]-1, 1[$: $P(X = k) = \frac{p}{1-p} \frac{(\frac{1-p}{2})^k}{(1 - \frac{1-p}{2})^{k+1}} = \frac{2p}{1-p} \frac{(1-p)^k}{(1+p)^{k+1}} = \frac{2p}{1-p^2}(\frac{1-p}{1+p})^k$

On reprend le calcul ci-dessus pour $k = 0$:

$P(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 0 | N = n) P(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n (1-p)^{n-1} p = \frac{p}{2} \frac{1}{1 - \frac{1-p}{2}} = \frac{p}{1+p}$

La loi de X est donc donnée par : $\boxed{\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X = 0) = \frac{p}{1+p} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ P(X = k) = \frac{2p}{1-p^2}(\frac{1-p}{1+p})^k \end{cases}}$

Exercice C

1.) L'identité convient mais on va donner un exemple moins trivial.
Si on note $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E, alors, l'endomorphisme s admettant pour matrice relativement à B la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ laisse invariant le plan d'équation $x_1 + x_2 = 0$.
C'est la matrice d'un endomorphisme symétrique car la matrice est symétrique et que l'on est dans une base orthonormée.

2.) • Soit $f \in S(E)$.
Soit $x \in ker(f) \cap Im(f)$
Alors $x \in Im(f) \Rightarrow \exists y \in E\ ,\ x = f(y)$ et $x \in ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_E$
Comme f est symétrique :
$< x, x >=< x, f(y) >=< f(x), y >=< 0_E, y >= 0$, donc $< x, x >= 0$ et donc $x = 0_E$
On a donc $ker(f) \cap Im(f) \subset \{0_E\}$ et comme l'autre inclusion est évidente on a $ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$

• La somme $ker(f) + Im(f)$ est donc directe et on a :
$dim(ker(f) + Im(f)) = dim(ker(f) \oplus Im(f)) = dim(ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E)$ par le théorème du rang.
On a donc $\begin{cases} ker(f) + Im(f) \subset E \\ dim(ker(f) + Im(f)) = dim(E) \end{cases}$ et donc $E = ker(f) + Im(f)$

On a bien finalement : $\boxed{E = ker(f) \oplus Im(f)}$

3.) $f \in S^+(E)$ donc f est diagonalisable dans une base orthonormée C par le théorème spectracle.
On a alors $M_C(f) = diag((\lambda_k)_{k \in [\![1;n]\!]})$ avec $n = dim(E)$

Si on note h l'endomorphisme admettant $diag((\sqrt{\lambda_k})_{k \in [\![1;n]\!]})$ comme matrice relativement à C.
(possible car $f \in S^+(E) \Rightarrow \lambda_k \geq 0$) alors $h \in S^+(E)$ et $h^2 = f$

4.) •• $x \in ker(f) \cap \ker(g) \Rightarrow f(x) = 0_E$ et $g(x) = 0_E \Rightarrow (f + g)(x) = 0_E \Rightarrow x \in ker(f + g)$
On a donc $ker(f) \cap ker(g) \subset ker(f + g)$

• Soit $x \in ker(f + g)$
Alors $< x, (f + g)(x) >=< x, 0_E >= 0$
D'autre part :$< x, (f + g)(x) >=< x, f(x) > + < x, g(x) >$
On a donc : $\underbrace{< x, f(x) >}_{\geq 0} + \underbrace{< x, g(x) >}_{\geq 0} = 0$ en utilisant $f, g \in S^+(E)$
Donc $< x, f(x) >=< x, g(x) >= 0$
Dans une base orthonormée de la forme : $(e_1, \ldots, e_k, e'_1, \ldots, e'_p)$ avec $(e_1, \ldots, e_k)$ base de $ker(f)$ et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ telle que : $f(e'_i) = \underbrace{\lambda_i}_{>0} e'_i$ on écrit $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum\limits_{i=1}^{p} x'_i e'_i$

Alors $< f(x), x >= 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 < f(e_i), e_i > + \sum\limits_{i=1}^{p} (x'_i)^2 < f(e'_i), e'_i >= 0$
$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{p} \underbrace{\lambda_i (x'_i)^2 < e'_i, e'_i >}_{\geq 0} = 0$

donne les x'_i nul et donc $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i \in ker(f)$

On montre de même que $x \in ker(g)$ et on a donc $x \in ker(f) \cap ker(g)$

On en déduit : $ker(f + g) \subset ker(f) \cap ker(g)$

• Comme on a montrer l'autre inclusion on a : $\boxed{ker(f) \cap ker(g) = ker(f + g)}$

• Soit $u \in S(E)$. On a déjà : $E = ker(u) \oplus Im(u)$
Soit $x \in ker(u)$ et $y \in Im(u)$.
Alors $y = u(z)$ avec $z \in E$.
Comme u est symétrique alors : $< x, y >=< x, u(z) >=< u(x), z >=< 0_E, z >= 0$ donc $< x, y >= 0$
On a donc : $E = ker(u) \oplus^{\perp} Im(u)$
On en déduit : $Im(u)^{\perp} = ker(u)$

• Appliquons le résultat précédent à $u = f + g$
Alors : $Im(f+g) = (ker(f+g))^{\perp}$, mais on a vu que : $ker(f+g) = ker(f) \cap ker(g)$ donc $Im(f+g) = (ker(f) \cap ker(g))^{\perp}$

On sait aussi que : $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$ comme on est en dimension finie.

Donc $Im(f + g) = (ker(f))^{\perp} + (ker(g))^{\perp} = Im(f) + Im(g)$

On a donc bien : $\boxed{Im(f + g) == Im(f) + Im(g)}$

Remarque : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $(E, <, >)$ alors : $\begin{cases} (F + G)^{\perp} = F \perp \cap G^{\perp} \\ F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp} \end{cases}$
Il faut la dimension finie pour avoir avoir égalité dans la deuxième inclusion.

Exercice D

1) • $M = U(U^T) = (X_iX_j)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]}$. La j-ième colonne de M est donc X_jU et donc $Im(M) = Vect(U)$ et $rg(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } U \neq 0 \\ 0 & \text{si } U = 0 \end{cases}$

Mais $(U = 0) = (\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i = 0))$.

Comme les (X_i) sont mutuellement indépendantes alors $P(U = 0) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1-p) = (1-p)^n$

Comme $(U \neq 0) = \overline{(U = 0)}$ alors $P(U \neq 0) = 1 - P(U = 0) = 1 - (1-p)^n$

Finalement : $\boxed{\text{rg(M) suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1-(1-p)^n}$

• $tr(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ car $X_i^2 = X_i$ puisque $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$

$tr(M)$ est alors la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toute une loi de Bernoulli de même paramètre p, d'après le cours : $\boxed{tr(M) \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } (n,p)}$

2) $M^2 = [U(U^T)][U(U^T)] = U\underbrace{(U^TU)}_{\in\mathbb{R}}U^T = (U^TU)UU^T = tr(M)M$

Donc M est une matrice de projection $\Leftrightarrow tr(M) = 1$

Avec le 1) on a : $P(tr(M) = 1) = \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$

$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ soit une matrice de projection vaut } np(1-p)^{n-1}}$

3) Pour $n = 2$:

$M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 \\ X_1X_2 & X_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_1X_2 \\ X_1X_2 & X_2 \end{pmatrix}$

$S = V^TMV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_1X_2 \\ X_1X_2 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 + X_1X_2 \\ X_1X_2 + X_2 \end{pmatrix} = X_1 + X_2 + 2X_1X_2$

Mais $X_1^2 = X_1$ et $X_2^2 = X_2$ donc $S = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = (X_1 + X_2)^2$

Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $S(\Omega) = \{0, 1, 4\}$

$(S = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ Comme X_1 et X_2 sont indépendantes $P(S = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$

$(S = 4) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ Comme X_1 et X_2 sont indépendantes $P(S = 4) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = p^2$

$(S = 0, S = 1, S = 4)$ est un système complet d'événement donc $P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 4) = 1 \Rightarrow P(S = 1) = 1 - P(S = 0) - P(S = 4) = 1 - p^2 - (1-p)^2 = 2p - 2p^2 = 2p(1-p)$

On peut résumer la loi de S par $S(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et le tableau

k	0	1	4
$P(S=k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

Alors $E(S) = 0P(S = 0) + 1P(S = 1) + 4P(S = 4) = 0 + 2p(1-p) + 4p^2 = 2p(1 - p + 2p) = 2p(1+p)$

$E(S^2) = 0P(S = 0) + 1P(S = 1) + 16P(S = 4) = 0 + 2p(1-p) + 16p^2 = 2p(1 - p + 8p) = 2p(1+7p)$

$V(S)$
$= E(S^2) - E(S)^2$
$= 2p(1+7p) - (2p(1+p))^2 = 2p(1 + 7p - 2p(1+p)^2)$
$= 2p(1 + 7p - 2p - 4p^2 - 2p^3 = 2p(1 + 5p - 4p^2 - 2p^3)$
$= 2p(1-p)(2p^2 + 6p + 1)$

On a donc $\boxed{E(S) = 2p(1+p) \text{ et } V(S) = 2p(1-p)(2p^2+6p+1)}$