Sujet 1

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

a) Démontrer que la suite de réels définis par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k \qquad (q = 1-p).$$

définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle "loi de Pascal de paramètres n et p".

On utilisera la formule dite du "binôme négatif" :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1;1[,\ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}.$$

b) Soit X une variable aléatoire qui suit cette loi. Déterminer sa série génératrice. En déduire que X admet une espérance et une variance et la calculer.

c) On suppose que deux variables X et Y indépendantes suivent deux lois de Pascal de paramètres respectifs (n,p) et (m,p). Déterminer la loi de $Z = X+Y$.

d) Démontrer la formule utilisée à la première question.

Corrigé :

a) Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k \geqslant 0$. Il suffit donc de démontrer que leur somme vaut 1. On commence par vérifier que la série converge par la méthode de d'Alembert :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(k+n)!}{(n-1)!(k+1)!} \frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!} \frac{p^n q^{k+1}}{p^n q^k} = \frac{k+n}{k+1} q \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} q < 1,$$

d'où la convergence. Sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k = \sum_{l=n-1}^{+\infty} \binom{l}{n-1} p^n q^{l-n+1} = p^n \sum_{l=n-1}^{+\infty} \binom{l}{n-1} q^{l-n+1} = \frac{p^n}{(1-q)^n} = 1$$

en utilisant la formule du binôme négatif.

b) La série génératrice de la variable aléatoire X s'écrit

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k t^k = \left(\frac{p}{1-qt}\right)^n,$$

par un calcul exactement semblable à la question précédente en remplaçant q par qt. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1]$, en particulier elle admet une espérance et une variance :

$$G_X'(t) = \frac{nqp^n}{(1-qt)^{n+1}} \quad \text{donc} \quad E(X) = G_X'(1) = \frac{nqp^n}{(1-q)^{n+1}} = n\frac{q}{p}$$

$$G_X''(t) = \frac{n(n+1)q^2p^n}{(1-qt)^{n+2}} \quad \text{donc} \quad G_X''(1) = \frac{n(n+1)q^2}{p^2}$$

et donc $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2 = n(n+1)\dfrac{q^2}{p^2} + n\dfrac{q}{p} - n^2\dfrac{q^2}{p^2} = \dfrac{nq}{p^2}$.

c) On peut déterminer cette loi par la fonction génératrice :

$$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t) = \left(\frac{p}{1-qt}\right)^{m+n},$$

donc Z suit une loi de Pascal de paramètres $m+n$ et p.

d) On dérive n fois sur l'intervalle $]-1,1[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On peut ainsi dériver n fois terme à terme son développement en série entière, le rayon de convergence restant le même, à savoir 1 :

$$(-1)(-2)\dots(-n)\frac{(-1)^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$$

$$(-1)^n n!\frac{(-1)^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!}x^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}$$

qui est bien l'égalité attendue.

Exercice 2

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

a) Quel est le rayon de convergence de la série entière considérée ? Sur quel ensemble la fonction f est-elle définie ?

b) Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles (il sera utile de s'intéresser à la dérivée de f).

c) Que valent $f(1)$ et $f(-1)$?

Corrigé :

a) On a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$, et la série entière correspondante est de rayon 1, qui est donc aussi le rayon de la série entière étudiée. Mais pour tout $x \in [-1,1]$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\right| \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$, qui est le terme général d'une série numérique convergente. Par conséquent la fonction f est définie sur $[-1,1]$.

b) Comme indiqué, on dérive f sur l'intervalle $]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

Il suffit donc de prendre la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ qui s'annule en 0, soit $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

Une méthode alternative consiste à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. On peut alors écrire pour $|x| < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n,$$

chacune des deux séries étant convergente car le rayon de convergence des séries entières correspondantes est 1. Pour la seconde série, on reconnaît au premier terme et au signe près la série entière de somme $\ln(1+x)$. On réindexe la première en posant $k = n-1$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{k+1} + (\ln(1+x) - x) = x\ln(1+x) + _l n(1+x) - x = (1+x)\ln(1+x) - x$$

qui est cohérent avec le résultat obtenu précédemment.

c) Pour $x = -1$ la série est télescopique (si on veut séparer en deux sommes, il est **impératif** de le faire sur des sommes partielles) :

$$f(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Pour $x = 1$, on peut séparer en deux séries qui sont convergentes en vertu du théorème des séries alternées, puis on réindexe la première :

$$f(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 2\ln 2,$$

en supposant connue la somme de la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (beaucoup de manières de le démontrer !). On aurait pu aussi simplement invoquer le théorème qui garantit la continuité de la série entière sur son intervalle de convergence, et faire tendre x vers -1 et vers 1 dans l'expression obtenue sur l'intervalle $]-1,1[$.

Sujet 2

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Établir pour tout x l'égalité $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2 + x^2}$.

Corrigé :

a) La fonction $u\colon (x,t) \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$, définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, est indéfiniment dérivable par rapport à x, et on a $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{t^k \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{e}^t - 1}$. La fonction et toutes les dérivées sont continues par rapport à la variable t.

Pour tout k et pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^k \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{e}^t - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$: en 0, on a pour $k = 0$ la limite x et pour $k \geqslant 1$ la majoration $\left|\dfrac{t^k \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{e}^t - 1}\right| \leqslant \dfrac{t^k}{\mathrm{e}^t - 1}$, dont un équivalent est t^{k-1}. La fonction est donc prolongeable par continuité. En $+\infty$, on a $\left|\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^k}{\mathrm{e}^t - 1}$, qui est clairement intégrable (par comparaison avec une intégrale de Riemann par exemple). Cette majoration montre que la domination est acquise pour tout k, ce qui prouve que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

b) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, on a

$$u(x,t) = \sin(xt)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} = \sin(xt)\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sin(xt)\mathrm{e}^{-kt}$$

On pose $f_k(t) = \sin(xt)\mathrm{e}^{-kt}$ et l'objectif est d'appliquer le théorème d'interversion série-intégrale. Il est clair que la série $\sum f_k(t)$ est convergente pour tout t, par ailleurs

$$|f_k(t)| \leqslant |xt|\mathrm{e}^{-kt}, \quad \text{donc} \quad \int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant |x|\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = |x|\left[\left(-\frac{t}{k} - \frac{1}{k^2}\right)\mathrm{e}^{-kt}\right]_0^{+\infty} = \frac{|x|}{k^2},$$

donc la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente. On peut donc appliquer le théorème et

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-kt}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$$

On calcule l'intégrale pour tout $k \geqslant 1$:

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(ix-k)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(ix-k)t}}{ix-k}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{ix-k}\right),$$

or $-\dfrac{1}{ix-k} = \dfrac{k+ix}{k^2+x^2}$, et finalement $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^2+x^2}$.

Exercice 2

Dans $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

b) Pour $f \in E$ strictement positive, on pose $l(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$.
Montrer que $l(f) \geqslant (b-a)^2$ et préciser les cas d'égalité.

Corrigé :

a) La symétrie est évidente par commutativité du produit et la bilinéarité résulte des propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ et de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs

$$(f|f) = \int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale. Si on suppose que cette quantité est nulle, alors on a une fonction f^2 positive, continue et d'intégrale nulle. Par le théorème de stricte positivité de l'intégrale, elle est identiquement nulle sur l'intervalle $[a,b]$, ce qui est bien entendu aussi le cas pour la fonction f. L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc bilinéaire symétrique et définie positive : c'est bien un produit scalaire sur E.

b) On définit les fonctions $g\colon t \mapsto \sqrt{f(t)}$ et $h\colon t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}$. On a alors

$$(g|h) = \int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}t = b-a.$$

Mais d'autre part on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(g|h)^2 \leqslant \|g\|^2\|h\|^2 = \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t \int_a^b (h(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = l(f).$$

On a donc bien prouvé que $l(f) \geqslant (b-a)^2$. S'ii y a égalité, c'est qu'on est dans un cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, soit $g = \lambda h$, où λ est un réel. Autrement dit $\forall t \in [a,b],\ \sqrt{f(t)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{f(t)}}$, et donc $\forall t \in [a,b],\ f(t) = \lambda$. Autrement dit la fonction f est constante. Réciproquement, on vérifie immédiatement que les fonctions constantes conduisent à une égalité : c'est donc une condition nécessaire et suffisante.

Sujet 3

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et évaluer f en ces points.

b) La fonction f admet-elle au point $(0,0)$ un extremum local ?

c) Justifier que la fonction f admet un minimum sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3\}$ et déterminer ce minimum.

d) Montrer que le minimum obtenu à la question précédente est global.

Corrigé :

a) Les points critiques sont les couples (x,y) tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, ce qui s'écrit :

$$4x^3 - 2(x-y) = 4y^3 + 2(x-y) = 0,$$

ce qui impose $x = -y$ et $x^3 = x$, et donc les couples $(0,0)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$. On obtient $f(0,0) = 0$, $f(1,-1) = f(-1,1) = -2$.

b) On a $f(x,x) = 2x^4 \geqslant 0$ et $f(x,-x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(-2+x^2)$, qui est négatif pour $|x| \leqslant \sqrt{2}$. Donc on trouve dans tout voisinage de $(0,0)$, des points dont l'image par f est positive et d'autres dont l'image est négative : la fonction n'admet au point $(0,0)$ ni un minimum ni un maximum local.

c) L'ensemble $\mathcal{D}$ est le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 3. Il est défini par une inégalité large portant sur une fonction continue, donc c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$, et par ailleurs il est borné par construction. La fonction f qui est continue admet donc un minimum sur cet ensemble. Ce minimum est atteint soit sur la frontière soit à un point critique de la fonction sur $\mathcal{D}$. Or on peut minorer la fonction f en utilisant les inégalités

$$(x-y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad x^4 + y^4 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \ :$$

$$f(x,y) \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2).$$

Pour (x,y) sur la frontière de l'ensemble $\mathcal{D}$, on a donc $f(x,y) \geqslant \dfrac{81}{2} - 18 = \dfrac{45}{2}$. On ne peut donc pas obtenir un minimum vu qu'on a des valeurs inférieures pour les trois points critiques obtenus. On sait qu'on ne peut avoir un minimum local en $(0,0)$, on étudie la nature du point critique $(1,-1)$ (c'est équivalent pour $(-1,1)$ vu que pour tout x, $f(-x,-y) = f(x,y)$). Pour cela on calcule les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2,\ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2,$$

d'où la matrice hessienne pour $(x, y) = (1, -1)$: $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est 96 et sa trace 20, donc les deux valeurs propres sont positives (12 et 8), et la fonction présent en ce point un minimum local. On a donc prouvé que le minimum de la fonction f sur $\mathcal{D}$ est atteint aux points $(1, -1)$ et $(-1, 1)$, et il vaut -2.

d) On a vu à la question précédente que pour tout (x, y), $f(x, y) \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$. Si on pose $t = x^2 + y^2$ et $\varphi(t) = \dfrac{t^2}{2} - 2t$, on peut étudier les variations de la fonction φ, dont la dérivée admet pour expression $\varphi(t) = t - 2$. La fonction φ est donc croissante sur $[2, +\infty[$, en particulier si $x^2 + y^2 \geqslant 9$, $f(x, y) \geqslant \varphi(9) = \dfrac{45}{2}$. Il est donc exclu que f prenne une valeur inférieure au minimum local -2 en dehors de l'ensemble $\mathcal{D}$. Il en résulte que le minimum -2 obtenue pour $(x, y) = (1, -1)$ ou $(-1, 1)$ est global.

Exercice 2

Soit a, b et c trois nombres complexes et $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note $J = M(0, 1, 0)$.

a) Calculer J^2, puis exprimer $M(a, b, c)$ en fonction de I (matrice identité), J et J^2.

b) Démontrer que J est diagonalisable et préciser son spectre.

c) En déduire que $M(a, b, c)$ est diagonalisable et préciser aussi son spectre.

Corrigé :

a) On écrit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis on calcule $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc $M(a, b, c) = aI + bJ + cJ^2$.

b) Le polynôme caractéristique de J s'écrit

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X & -1 \\ X-1 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2+X+1),$$

soit $\chi_J(X) = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$. Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, ce qui entraîne que J est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

c) Il existe une matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}JP = \operatorname{diag}(1, j, j^2)$. On a donc $P^{-1}J^2P = \left(P^{-1}JP\right)^2 = \operatorname{diag}(1, j^2, j)$, et bien entendu $P^{-1}IP = I$. Il s'ensuit donc que $P^{-1}M(a, b, c)P = \operatorname{diag}(a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj)$. On a donc bien prouvé que la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable et que son spectre est $\operatorname{Sp}(M(a, b, c)) = \left\{a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj\right\}$.

Sujet 4

Vous avez une demi-heure de préparation pour un exercice que vous présenterez en 20 minutes. Vous serez ensuite interrogé(e) sur un second exercice plus court, sans préparation.

Exercice 1

Soit, pour $f \in E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\Phi(f) : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f$ et $\Phi(f)(0) = f(0)$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est une fonction paire.

c) Montrer que 0 est une valeur propre de Φ et déterminer les vecteurs propres associés.

d) On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre de Φ. Montrer que toute fonction propre f est paire, puis que si F est la primitive de f nulle en 0, alors F est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' - y = 0$. En déduire les valeurs propres non nulles de Φ et les vecteurs propres associés.

Corrigé :

a) La linéarité découle de la linéarité de l'intégrale et de l'évaluation en 0. Il s'agit maintenant de montrer que $\Phi(f) \in E$, autrement dit que Φ est continue sur $\mathbb{R}$. C'est clair en tout x non nul. Pour $x \neq 0$, on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, ainsi on peut écrire

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2x}(F(x) - F(-x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x) - F(0)}{x} + \frac{F(-x) - F(0)}{-x}\right).$$

Chaque quotient tend vers $f(0)$ par définition du nombre dérivé en 0 de la fonction F. On conclut donc que $\Phi(f)(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0)$, et donc que la fonction $\Phi(f)$ est continue en 0. On a donc bien prouvé que $\Phi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et donc que Φ est un endomorphisme de E.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{-2x}\int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(f)(x),$$

donc la fonction $\Phi(f)$ est paire.

c) On suppose $\Phi(f) = 0_E$. Avec les mêmes notations que précédemment, cela signifie que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F(-x)$, donc la fonction F est paire, et en dérivant : $F'(x) = f(x) = -F'(-x) = -f(-x)$, donc la fonction f est impaire. Réciproquement, si la fonction f est impaire, alors $f(0) = 0$ et

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2x}\left(\int_{x}^{0} -f(-u)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2x}\int_{0}^{x} \left(f(-t) + f(t)\right)\,\mathrm{d}t = 0,$$

donc l'espace propre associé à la valeur propre 0 est l'ensemble des fonctions continues impaires sur $\mathbb{R}$.

d) Si $\Phi(f)=\lambda f$, alors comme $\lambda \neq 0$,

$$f(-x)=\frac{1}{\lambda}\Phi(f)(-x)=-\frac{1}{2\lambda x}\int_x^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\lambda x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\Phi(f)(x)=f(x),$$

donc la fonction f est paire. Sa primitive F qui s'annule en 0 est impaire et on a $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\lambda x f(x)$, soit $F(x)-F(-x)=2F(x)=2\lambda f(x)=2\lambda F'(x)$, donc F est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' - y = 0$.
Donc $F(x)=k|x|^{\frac{1}{\lambda}}$ pour $x\neq 0$, qui ne peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qu'à condition que $\dfrac{1}{\lambda}\geqslant 1$, autrement dit $\lambda\in]0,1]$. Réciproquement, si $\lambda\in]0,1]$, la fonction $x\mapsto |x|^{\frac{1}{\lambda}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et c'est une fonction propre associée à la valeur propre λ.

Exercice 2

Soit (U,V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Rappeler la loi suivie par la somme de n variables aléatoires indépendante qui suivent un loi de Bernoulli de même paramètre p.
b) On pose $S=(U-1)^2+(V-1)^2$. Déterminer la loi de S.
c) On pose $T=(U-1)(V-1)+1$. Calculer $E(S(T-1))$. Déterminer la loi de T . Calculer la covariance de (S,T). Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Corrigé :

a) La somme de ces n variables aléatoires suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
b) La variable aléatoire U prend les valeurs 0, 1 et 2, donc $(U-1)^2$ prend les valeurs 0 et 1, et $P((U-1)^2=1)P(U=0)+P(U=2)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$. On conclut donc que $(U-1)^2\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. C'est aussi le cas pour $(V-1)^2$, et comme U et V sont indépendantes, c'est aussi le cas pour $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$, donc leur somme S suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.
c) On peut écrire $S(T-1)=[(U-1)^2+(V-1)^2](U-1)(V-1)=(U-1)^3(V-1)+(V-1)^3(U-1)$. Par indépendance de U et V, on a donc

$$E(S(T-1))=E((U-1)^3)E(V-1)+E((V-1)^3)E(U-1)=2E((U-1)^3)E(V-1)$$

comme U et V suivent la même loi. Or $U-1$ comme $V-1$ prennent les valeurs -1, 0 et 1, elles sont égales à leurs cubes, et les probabilités pour -1 et 1 sont égales, par conséquent $E(S(T-1))=0$.
La variable aléatoire T prend les valeurs 0, 1, et 2. On a $T=2$ lorsque $U=V=2$ ou $U=V=0$, d'où

$$P(T=2) = P(U=2, V=2) + P(U=0, V=0) = \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

De manière similaire, $T = 0$ lorsque $U = 0$ et $V = 2$ ou inversement :

$$P(T=0) = P(U=0, V=2) + P(U=2, V=0) = \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

et par différence $P(T = 1) = \frac{3}{4}$. On calcule alors la covariance de S et T :

$$\mathrm{cov}(S, T) = E(ST) - E(S)E(T) = E(S(T-1)) + E(S) - E(S)E(T) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

En effet, $E(S) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ et $E(T) = 1$ d'après la loi qui vient d'être établie. La covariance des deux variables S et T est nulle mais cela ne suffit pas pour prouver que ces deux variables sont indépendantes. On peut remarquer que S et T ne peuvent pas être nulles en même temps, donc $P(S = 0, T = 0) = 0$. Or $P(S = 0) = \frac{1}{4}$ et $P(T = 0) = \frac{1}{8}$. Les deux variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.