Feuille d'exercices posés aux oraux 2023 aux élèves de PSI* de La-Fayette

1 ccINP

Planche 1. ccINP *Nolan Thomas*

Exercice 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{ch^n(x)}$

1) Montrer que les fonctions f_n *sont intégrables sur* $[0, +\infty[$

On pose $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(x)} dx$

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

3) Déterminer la nature de $\sum (-1)^n I_n$

Déterminer la nature de $\sum I_n$

4) Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$

---

1) Les fonctions f_n *sont continues sur* $[0, +\infty[$*. Etudions le problème en* $+\infty$*.*
$f_n(x) \underset{x=+\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ *et* $x \mapsto 2e^{-nx}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$*. d'après le cours.*
Donc, par règle de l'équivalent, $\boxed{\text{les fonctions } f_n \text{ sont intégrables sur } [0, +\infty[.}$

2) • *Avec l'équivalent du 1), on a* $\forall x \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
Donc la suite (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle (notée* θ*) sur* $]0, +\infty[$
• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \leq f_1(x)$ *avec* f_1 *qui est intégrable sur* $]0, +\infty[$*.*
On a l'hypothèse de domination.
• *On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \theta(x)dx = 0$$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

3) $I_{n+1} - I_n = \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\dfrac{1 - ch(x)}{ch^{n+1}(x)}}_{\leq 0} dx \leq 0$

Donc la suite (I_n) *est décroissante, comme sa limite est nulle on peut appliquer le théorème spécial et on a* $\boxed{\sum (-1)^n I_n \text{ convergente.}}$

4) $\bullet$*Notons* R *le rayon de convergence de* $\sum I_n x^n$
Comme $\sum(-1)^n I_n$ *est convergente alors* $R \geq 1$
$\bullet$ *Pour* $x > 0$ *et* $n \geq 1$ *:*
$\frac{sh(x)}{ch(x)} \leq 1 \Rightarrow \frac{sh(x)}{ch^{n+1}(x)} \leq \frac{1}{ch^n(x)} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{sh(x)}{ch^{n+1}(x)}dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{ch^n(x)}dx = I_n$

La première intégrale est convergente par règle de comparaison. On y effectue le changement de variable C^1 *bijectif :* $u = ch(x)$
On a : $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{u^{n+1}}du \leq I_n \Rightarrow [\frac{-1}{nu^n}]_1^{+\infty} \leq I_n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq I_n$
Donc par la règle de comparaison pour les séries à termes positifs, comme $\sum \frac{1}{n}$ *est une série divergente, alors* $\sum I_n$ *est divergente.*
$\bullet$ *Comme* $\sum I_n$ *est divergente alors* $R \leq 1$
$\bullet$ $R \leq 1$ *et* $R \geq 1$ *donc* $\boxed{\textit{le rayon de convergence de } \sum I_n x^n \textit{ vaut } 1.}$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On pose* $u_n = tr(A^n)$
1) En utilisant un polynôme annulateur de A *de degré 3, donner une relation linéaire entre* u_{n+2}, u_{n+1} *et* u_n.
En déduire une expression de u_n *en fonction de* n.
2) Montrer que A *est diagonalisable dans* $M_3(\mathbb{C})$
Trouver une relation entre les valeurs propres de A *et* u_n.
3) Nature de $\sum u_n$

---

1) $\chi_A(X) = \begin{pmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{pmatrix} = X^3 - X^2 + X.$
Par le théorème de Hamilton-Cayley : $X^3 - X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A de degré 3.
Pour $n \geq 1$ on multiplie $A^3 - A^2 + A = 0$ par A^{n-1} et on a : $A^{n+2} - A^{n+1} + A^n = 0$ et par linéarité de la trace : $\boxed{u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0}$
$(u_n)_{n>0}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants d'équation caractéristique : $X^2 - X + 1 = 0$
$\Leftrightarrow X = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X = exp(i\frac{i\pi}{3})$ ou $X = exp(-\frac{i\pi}{3})$
D'après le cours, en remarquant que $\left|exp(i\frac{i\pi}{3})\right| = 1$, on a :
$\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ u_n = acos(\frac{n\pi}{3}) + bsin(\frac{n\pi}{3})$
Comme $u_2 = tr(A^2) = -1$ et $u_1 = tr(A) = 1$ alors :
$\begin{cases} u_2 = \frac{-1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = -1 \\ u_1 = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + \sqrt{3}b = -2 \\ a + \sqrt{3}b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n = 2cos(\frac{n\pi}{3})}$

2) D'après le polynôme caractéristique, A admet dans $\mathbb{C}$ trois valeurs propres distinctes, 0, $exp(i\frac{i\pi}{3})$ et $exp(-i\frac{i\pi}{3})$

On a donc $\boxed{A \text{ diagonalisable dans } M_3(\mathbb{C})}$ et A semblable à $diag(0, exp(\frac{i\pi}{3}), exp(\frac{-i\pi}{3}))$.

Donc A^n est semblable à $diag(0, exp(\frac{in\pi}{3}), exp(\frac{-in\pi}{3}))$ et donc

$u_n = 0 + exp(i\frac{in\pi}{3}) + exp(-in\frac{i\pi}{3}) = 2cos(\frac{n\pi}{3})$ On retrouve bien le résultat du 1).

3) u_n ne tend pas vers 0 (par exemple car $u_{6n} = 2$) donc $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$ (grossièrement).

Planche 2. ccINP *Titouan Séguy*

Exercice 1

Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\beta > 0$.

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X = i, \cap Y = j) = \begin{cases} 0 & si\ i < j \\ \frac{e^{-\beta}\beta^i\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & si\ i \geq j \end{cases}$$

1. Donner la loi de X.

2. Donner la loi de Y.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z.

5. Donner la probabilité de $Y = j$ sachant $Z = k$. ***(???)***

6. Conclure ... ***(???)***

---

1) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$ associé à Y, on a : $\forall i \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$

Alors : $\mathbb{P}(X = i)$

$= \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$ car $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = 0$ si $i < j$

$= e^{-\beta}\beta^i \sum_{j=0}^{i} \frac{\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$

$= e^{-\beta}\beta^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!(i-j)!}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}$ on utilise la formule du binôme

$= e^{-\beta}\beta^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j} = e^{-\beta}\beta^i\frac{1}{i!}(\alpha + 1 - \alpha)^i = e^{-\beta}\frac{\beta^i}{i!}$

On reconnaît alors que : $\boxed{X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \beta}$

2) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(X = i)_{i\in\mathbb{N}}$ associé à X, on a : $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$

Alors : $\mathbb{P}(Y = j)$

$= \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$ car $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = 0$ si $i < j$

$= \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{e^{-\beta}\beta^i\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}$

$= \frac{e^{-\beta}\beta^j\alpha^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\beta^{i-j}(1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!}$

$= \frac{e^{-\beta}\beta^j\alpha^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\beta(1-\alpha))^k}{k!}$ on reconnaît le DSE_0 de exp

$= \frac{e^{-\beta}\beta^j\alpha^j}{j!} exp(\beta(1-\alpha)) = \frac{e^{-\alpha\beta}(\beta\alpha)^j}{j!}$

On reconnaît alors que : $\boxed{Y \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \alpha\beta}$

3) $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 2) = 0$ car $1 < 2$, de plus, comme X et Y suivent des lois de Poisson, $\mathbb{P}(X = 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = 2) \neq 0$

On a donc $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2)$ et donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

4) Comme $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = 0$ si $i < j$ alors on a $X \geq Y$ et donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, alors : $(Z = k) = \bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i \cap Y = i - k)$

Comme on a des événements incompatibles :

$\mathbb{P}(Z = k)$

$= \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i \cap Y = i - k)$

$= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{e^{-\beta}\beta^i\alpha^{i-k}(1-\alpha)^k}{(i-k)!k!}$

$= \frac{e^{-\beta}\beta^k(1-\alpha)^k}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\beta^{i-k}\alpha^{i-k}}{(i-k)!}$

$= \frac{e^{-\beta}\beta^k(1-\alpha)^k}{k!} e^{\alpha\beta} = e^{-\beta(1-\alpha)} \frac{(\beta(1-\alpha)^k)}{k!}$

On reconnaît alors que : $\boxed{Z \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \beta(1-\alpha)}$

Remarque : $\beta(1 - \alpha) > 0$ car $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 0$

5) $\mathbb{P}(Y = j|Z = k)$

$= \frac{\mathbb{P}(Y=j\cap Z=k)}{\mathbb{P}(Z=k)}$

$= \frac{\mathbb{P}(Y=j\cap X-Y=k)}{\mathbb{P}(Z=k)}$

$= \frac{\mathbb{P}(Y=j\cap X=j+k)}{\mathbb{P}(Z=k)}$

$= \frac{\frac{e^{-\beta}\beta^{j+k}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j!k!}}{e^{-\beta(1-\alpha)}\frac{(\beta(1-\alpha)^k)}{k!}} = e^{-\alpha\beta}\frac{(\alpha\beta)^j}{j!}$

On reconnaît alors que : $\boxed{Y|_{Z=k} \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \beta\alpha}$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$: $< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$

On pose $H = \{P \in E \ , \ P(1) = 0\}$

a) Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.

b) Déterminer la projection orthogonale de $R = 1$ sur H.

---

a) $<,>$ est le produit scalaire canonique en considérant la base canonique comme une base orthonormée.

b) On remarque que H est le noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(1)$, donc H est un hyperplan et on en déduit donc $dim(H^{\perp}) = 1$.

Si on note : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P \in H \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$

Donc, si on pose $Q = \sum_{k=0}^{n} X^k$ alors $P \in H \Leftrightarrow < Q, P >= 0$

On en déduit : $H^{\perp} = Vect(Q)$

Notons R_1 la projection orthogonale de R sur $H^{\perp}$ et $R^{\perp}$ celle sur H.

Alors, par le théorème de projection orthogonale : $R_1 = \frac{<R,Q>}{<Q,Q>} Q$ et $R = R_1 + R^{\perp}$

On a donc $R^{\perp} = R - \frac{<R,Q>}{<Q,Q>} Q$

$< R, Q >=< 1, \sum_{k=0}^{n} X^k >= 1$, $<Q, Q >= n + 1$ donc $R^{\perp} = 1 - \frac{1}{n+1} Q = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} X^k$

$\boxed{\text{La projection orthogonale de } R = 1 \text{ sur } H \text{ est } \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} X^k}$

Planche 3. ccINP *Emilien Carvhalo*

Exercice 1

Soit une suite de variable aléatoire ***indépendantes*** $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose que chaque X_k *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $p_k \in]0, 1[$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ P_n = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$.

a) Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.

b) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

c) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - P_n \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0$

On suppose que : $\lim_{n \to +\infty} P_n = p$.

d) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon) = 0$

---

a) On a pour tout k : $\mathbb{E}(X_k) = p_k$ *et* $\mathbb{V}(X_k) = p_k(1-p_k)$.

Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = P_n$

Comme les variables aléatoires (X_k) sont indépendantes, et par propriété de la variance :

$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)}{n^2}$

On a donc : $\boxed{\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = P_n \text{ et } \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)}{n^2}}$

b) Comme $0 \leq p_k(1-p_k) \leq 1$ *alors* $0 \leq \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} 1}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *donc* $\boxed{\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

c) $\mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}) = \mathbb{P}(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})\right| \geq \frac{\epsilon}{2}) \leq \frac{\mathbb{V}(\frac{S_n}{n})}{\epsilon^2/4}$ *par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

Comme par le b) on a $\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *on en déduit :* $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0}$

d) $\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| = \left|\frac{S_n}{n} - p\right| = \left|\frac{S_n}{n} - P_n + P_n - p\right| \leq \left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| + |P_n - p|$

Comme on a supposé $\lim_{n\to+\infty} P_n = p$ *alors* $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N \Rightarrow |P_n - p| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc pour $n \geq N$, $\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \leq \left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| + \frac{\varepsilon}{2}$

On a donc : $\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon \Rightarrow \left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2}$

Donc $(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right|) \subset (\left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2})$ *et donc :*

$\mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(\left|\frac{S_n}{n} - P_n\right| \geq \frac{\epsilon}{2})$

Avec la limite du c) on a finalement : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) = 0}$

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A est diagonalisable **dans** *$M_n(\mathbb{C})$ et donner ses valeurs propres.*

b) Quel est la dimension de l'espace vectoriel engendrée par la famille $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c) Calculer le déterminant de A.

d) On pose $B_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A^k}{n}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} B_n$

---

a) Le polynôme caractéristique de A vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :
$\chi_A(X) = XX^{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = X^n - 1$

$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est une racine n-ième de l'unité. $A \in M_n(\mathbb{C})$ et admets n valeurs propres distinctes, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C}) \text{ et ses valeurs propres sont les racines n-ième de l'unité.}}$

b) • $A^n = I_n$ donc $(A^k)_{k\in\mathbb{N}} = (A^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$

• On pose $\omega = exp(\frac{2i\pi}{n})$. Ainsi avec le a), A est semblable à $D = diag(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$
On a donc $dim(Vect((A^k)_{k\in\mathbb{N}})) = dim(Vect((A^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]})) = dim(Vect((D^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}))$

• Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i D^i = 0$

Alors $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i diag(1, \omega^i, (\omega^2)^i, \dots, (\omega^{n-1})^i) = 0$

ce qui s'écrit $\underbrace{V(1, \omega_1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})}_{Vandermonde} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = (0)$

Comme les racines n-ième sont distinctes, la matrice de Vandermonde est inversible donc les a_i sont nuls.
On en déduit $Vect((D^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ libre, et donc $\boxed{dim(Vect((A^k)_{k\in\mathbb{N}})) = n}$

c) $\chi_A(0) = det(-A) = (-1)^n det(A)$ et $\chi_A(0) = -1$ donc $\boxed{det(A) = (-1)^{n+1}}$

d) En calculant A^2, A^3, ... on remarque que : $\boxed{B_n = \frac{1}{n}U \text{ avec } U \text{ la matrice ne contenant que des 1.}}$

Remarque : ces calculs des puissances de A pouvaient permettre de résoudre le b) car on obtient une famille clairement libre.

e) On a déjà vu que $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$

Soit $p \in \mathbb{N}$, calculons : $C_{pn} = \sum\limits_{k=0}^{pn-1} D^k = diag(\sum\limits_{k=0}^{pn-1} 1, \sum\limits_{k=0}^{pn-1} \omega^k, (\sum\limits_{k=0}^{pn-1} \omega^2)^k, \dots, \sum\limits_{k=0}^{pn-1} (\omega^{n-1})^k)$

Mais $\sum\limits_{k=0}^{pn-1} w^k = \frac{1-w^{pn}}{1-w} = \frac{1-(w^n)^p}{1-w} = 0$ si w est une racine n-ième de l'unité différente de 1.

Donc $\sum\limits_{k=0}^{pn-1} D^k = diag(pn, 0, \dots, 0)$ et donc $C_{np} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{pn-1} A^k}{pn} = Pdiag(1, 0, \dots, 0)P^{-1} = \frac{1}{n}U$ par le d)

Soit $N \in \mathbb{N}$, alors $C_N = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n\lfloor \frac{N}{n}\rfloor -1} A^k + \sum\limits_{n\lfloor \frac{N}{n}\rfloor}^{N-1} A^k}{N}$

qui s'écrit $C_N = \underbrace{\dfrac{n\lfloor \frac{N}{n}\rfloor}{N}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underbrace{\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n\lfloor \frac{N}{n}\rfloor -1} A^k}{n\lfloor \frac{N}{n}\rfloor}}_{\frac{1}{n}U} + \dfrac{\underbrace{\sum\limits_{n\lfloor \frac{N}{n}\rfloor}^{N-1} A^k}_{\text{bornée car somme finie}}}{N}$

On a finalement : $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} C_n = \frac{1}{n}U}$

Remarque : c'est la matrice de la projection orthogonale sur $vect((1,\dots,1))$

Planche 4. ccINP *Mathieu Testeil*

Exercice 1

Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer que : $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a}dt$ *est convergente.*

2) Montrer l'existence et calculer $\int\limits_0^1 t^{na}dt$ *pour* $n \in \mathbb{N}$

3) On donne l'égalité $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$

3)a) Peut-on montrer cette égalité à l'aide de la convergence uniforme ?

3)b) Peut-on montrer cette égalité grâce à la majoration du reste ?

3)c) Peut-on montrer cette égalité par le théorème d'intégration terme à terme ?

4) Que donne cette égalité pour $a = 1$ *?*

---

1) $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ *est continue sur le segment* $[0,1]$*, donc* $\boxed{\text{l'intégrale } \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a}dt \text{ est convergente.}}$

2) De même $t \mapsto t^{na}$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc* $\int\limits_0^1 t^{na}dt$ *est convergente.*

De plus $\int\limits_0^1 t^{na}dt = [\frac{t^{na+1}}{na+1}]_0^1 = \frac{1}{1+na}$ *On a donc :* $\boxed{\int\limits_0^1 t^{na}dt = \frac{1}{1+na}}$

3) a) $\forall t \in [0,1[\ ,\ \frac{1}{1+t^a} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-t^a)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{na}$ *car* $t^a \in [0,1[$

$\sum\limits_{n=0}^{N}(-t^a)^n = \frac{1-(-t^a)^{(N+1)}}{1+t^a}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+t^a} - \sum\limits_{n=0}^{N}(-t^a)^n = \frac{(-t^a)^{(N+1)}}{1+t^a} = (-1)^{N+1}\frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a} = R_N(t)$

Etudions $\begin{array}{rccc} A & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \mapsto & \frac{u^{N+1}}{1+u} \end{array}$

A est dérivable et $A'(u) = \frac{(N+1)u^N(1+u)-u^{N+1}}{(1+u)^2} = \frac{u^N((N+1)+Nu^N)}{(1+u)^2} \geq 0$

On en déduit $||R_N||_\infty = A(1) = \frac{1}{2}$ *qui ne tend pas vers 0 et donc il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonctions.*

On ne peut pas démontrer l'égalité voulue avec la convergence uniforme.

3) b) $|R_n(t)| = \left|(-1)^{N+1}\frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a}\right| \leq \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a} \leq t^{a(N+1)}$

On va utiliser cette majoration du reste. Comme $\frac{1}{1+t^a} = \sum\limits_{n=0}^{N}(-)^n t^{na} + R_N(t)$ *on a :*

$\left|\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a}dt - \int\limits_0^1 \sum\limits_{n=0}^{N}(-)^n t^{na}dt\right| \leq \int\limits_0^1 |R_N(t)|\,dt$

$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a}dt - \sum\limits_{n=0}^{N}\int\limits_0^1 (-)^n t^{na}dt\right| \leq \int\limits_0^1 t^{a(N+1)}dt$

$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^a}dt - \sum\limits_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{1+na}\right| \leq \frac{1}{1+a(N+1)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

La majoration du reste permet d'obtenir l'égalité voulue.

3) c) $\sum\int\limits_0^1 t^{na}dt = \sum\frac{1}{1+na}$ *qui est divergente.*
Donc on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

4) Pour $a = 1$*, on a alors :* $\boxed{ln(2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n}}$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *associé.*
1) Calculer les valeurs propres de A
2) A est-elle diagonalisable ?
3) Trouver u *et* v *deux vecteurs propres de* f*, et* w *un vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *pour que* (u, v, w) *soit une base.*
4) Déterminer la matrice de f *relativement à la base du 3).*

---

1) $\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2$ et donc $sp(A) = \{-1, 2\}$

2) On trouve : $E_2 = ker(A - 2I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ qui est de dimension 1 alors que 2 est valeur propre double, donc A n'est pas diagonalisable.

3) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associée à la valeur propre -1.

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associée à la valeur propre 2.

Soit $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si on note B_c la base canonique alors : $det_{B_c}(u, v, w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

donc (u, v, w) est une base avec u et v deux vecteurs propres de A.

4) On a déjà : $f(u) = -u,\ f(v) = 2v$

$$f(w) = au + bv + cw$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + b = -5 \\ a + b + c = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -6 \\ c = 2 \end{cases}$$

On a donc $f(w) = -6u + v + 2w$, la matrice de f relativement à la base (u, v, w) est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Planche 5. ccINP *Quentin Meyzonnier*

Exercice 1

On pose $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{sin(t)}{sh(t)} dt$

1) Montrer que : I *est convergente.*

2) Montrer que : $\forall t \in]0, +\infty[\ ,\ \frac{sin(t)}{sh(t)} = 2e^{-t} sin(t) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$

3) Montrer que $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}$

4) On donne : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Donner un encadrement de* I.

---

1) On pose pour tout $t > 0\ ,\ f(t) = \frac{sin(t)}{sh(t)}$ *alors* f *est continue sur* $]0, +\infty[$

Au voisinage de 0 *:* $f(t) = \frac{t+o(t)}{t+o(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$ *donc* f *est prolongeable par continuité en* 0 *et donc* f *est intégrable sur* $]0, 1]$.

Pour $t \geq 1$ *:* $0 \leq |f(t)| \leq \frac{1}{sh(t)} \sim \frac{2}{e^t} = 2e^{-t}$
Mais $t \mapsto e^{-t}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *donc par équivalent, puis comparaison,* f *est intégrable sur* $[1, +\infty[$

f *est intégrable sur* $]0, 1]$ *et sur* $[1, +\infty[$*, donc sur* $]0, +\infty[$ *et donc* $\boxed{I \text{ est convergente.}}$

2) Pour $t > 0$ *:* $\frac{1}{sh(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} = \frac{2}{e^t} \frac{1}{1-e^{2t}}$

Comme $u = e^{-2t} \in]0, 1[$ *on peut utiliser :* $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$

Donc $\frac{1}{sh(t)} = \frac{2}{e^t} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt} = 2e^{-t} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$

On a donc bien finalement : $\boxed{\forall t > 0\ ,\ \frac{sin(t)}{sh(t)} = 2e^{-t} sin(t) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}}$

3) •

$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{sh(t)} dt$ *on utilise la question 2)*

$= \int\limits_0^{+\infty} 2e^{-t} sin(t) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt} dt$

$= \int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t} sin(t) e^{-2nt} dt$

On veut intervertir le signe-somme et le signe intégrale.
Ici le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas et on va utiliser le théorème de convergence dominée.

On pose $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} 2e^{-t} sin(t) e^{-2nt}$
Avec la question 2) on a $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *qui converge simplement sur* $]0, +\infty[$ *vers la fonction* f *(définie en 1)).*
Comme $\forall t > 0$, $|sin(t| \leq t$ *alors :* $|S_N(t)| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} 2e^{-t} te^{-2nt} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2e^{-t} te^{-2nt} = \frac{2te^{-t}}{1-e^{-2t}}$

On pose : $\forall t > 0$, $\varphi(t) = \frac{2te^{-t}}{1-e^{-2t}}$. φ *est continue sur* $]0, +\infty[$.
Au voisinage de 0 *:* $\varphi(t) = \frac{2t(1+o(1))}{1-(1-2t+o(t))} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ *donc* φ *est prolongeable par continuité en* 0 *et donc intégrable sur* $]0, 1[$.
En $+\infty$ *:* $\varphi(t) \sim 2te^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$, *donc, par négligeabilité, comme* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *alors* φ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$.
Finalement φ *est intégrable sur* $]0, +\infty[$

• *On a donc : les* (S_N) *sont continues par morceaux sur* $]0, +\infty[$, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f *sur* $]0, +\infty[$ *et* $\forall t > 0$, $|S_N(t)| \leq \varphi(t)$ *avec* φ *intégrable sur* $]0, +\infty[$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

$\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(t) dt = \lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} S_N(t) dt$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t) dt = \lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} 2e^{-t} sin(t) e^{-2nt} dt$ *Comme on a une somme finie*

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t) dt = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \int\limits_0^{+\infty} 2e^{-t} sin(t) e^{-2nt} dt$

• *On fait maintenant le calcul intermédiaire :*

$\int\limits_0^{+\infty} 2e^{-t} sin(t) e^{-2nt} dt$

$= Im(2 \int\limits_0^{+\infty} exp((-(2n+1)+i)t) dt$

$= Im([\frac{2exp((-(2n+1)+i)t)}{-(2n+1)+i}]_0^{+\infty})$

$= Im([\frac{-2}{-(2n+1)+i})$

$= Im([\frac{-2(-(2n+1)-i)}{(2n+1)^2+1})$

$= \frac{2}{(2n+1)^2+1}$

En revenant à la relation précédente : $I = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{2}{(2n+1)^2+1}$

et finalement, on a bien : $\boxed{I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1}}$

4) $\frac{2}{(2n+1)^2+2} \leq \frac{2}{(2n+1)^2+1} \leq \frac{2}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{2}{4n^2+4n+3} \leq \frac{2}{(2n+1)^2+1} \leq \frac{2}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{2}{4n^2+8n+4} \leq \frac{2}{4n^2+4n+3} \leq \frac{2}{(2n+1)^2+1} \leq \frac{2}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{2}{(2n+2)^2} \leq \frac{2}{(2n+1)^2+1} \leq \frac{2}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \frac{2}{(2n+1)^2+1} \leq \frac{2}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2+1} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} \leq I \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Mais $\frac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

Finalement : $\boxed{\frac{\pi^2}{12} \leq I \leq \frac{\pi^2}{8}}$

Exercice 2

On définit φ une application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à P associé le reste de la division euclidienne de P ***par*** *$X^2 - 1$*
1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
2) φ est-il diagonalisable ? Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de φ
3) On note A la matrice associée à φ relativement à la base canonique.
Quelle est le déterminant de A ? A est-elle inversible ? φ est-il un automorphisme ?
Quelle est le déterminant de $A + I_n$? $A + I_n$ est-elle inversible ? $\varphi + Id_{\mathbb{R}_3[x]}$ est-il un automorphisme ? A quoi ressemble $(I_n + A)^{-1}$?

---

1) Soit P et $P_1 \in E = \mathbb{R}_3[X]$.
En posant $R = \varphi(P)$ et $R_1 = \varphi(P_1)$ alors on a : $P = Q(X^2-1)+R$ avec $deg(R) < 2$ et $P_1 = Q_1(X^2-1)+R_1$ avec $deg(R_1) < 2$
Donc $P+\lambda P_1 = (Q+\lambda Q_1)(X^2-1)+(R+\lambda R_1)$ avec $deg(R+\lambda R_1) < 2$
On en déduit $\varphi(P+\lambda P_1) = \varphi(P)+\lambda\varphi(P_1)$ (par unicité de la divison euclidienne)
Donc φ est linéaire et comme $\varphi(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$ alors : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$

2) On écrit la matrice de φ relativement à la base canonique. On la note A.
On a : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = X$,
$X^2 = 1(X^2-1)+1$ donc $\varphi(X^2) = 1$,
$X^3 = X(X^2-1)+X$ donc $\varphi(X^3) = X$

On a alors : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Comme A est triangulaire supérieure alors ses valeurs propres sont sur la diagonales et donc $sp(A) = sp(\varphi) = \{0,1\}$ avec 0 et 1 qui sont valeurs propres doubles.
On a directement $E_1 = ker(\varphi - Id_E) = Vect(1,X)$ et $E_0 = ker(\varphi) = Vect(X^2-1, X(X^2-1))$
$dim(E_1)+dim(E_0) = 2+2 = 4 = dim(E)$ donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

3) • Vu que l'on connaît déjà A : $det(A) = 0$, donc A n'est pas inversible et donc φ n'est pas un automorphisme.

• $A+I_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $det(A+I_n) = 4 \neq 0$, donc $A+I_n$ est inversible et $\varphi + Id_{\mathbb{R}_3[x]}$ est un automorphisme.
Comme $I_n + A$ est triangulaire supérieure alors $(I_n+A)^{-1}$ aussi.

Planche 6. ccINP *Maeva Cluzel*

Exercice 1
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et B une base de E.
On considère deux endomorphismes f et g de E tels que : $g \circ g = f$.

On suppose de plus que la matrice de f relativement à B est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Trouver les valeurs propres de A et les vecteurs propres. A est-elle diagonalisable ?

2) On note e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1, montrer que $g(e_1)$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
On note e_3 un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3, montrer que $g(e_3)$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.

3) g est-il diagonalisable ?

---

1) $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-3)$, $E_3 = vect(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$, $E_1 = vect(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})$

$dim(E_0) + dim(E_1) = 1 + 1 = 2 < 3$ *donc* A *n'est pas diagonalisable.*

2) $f(e_1) = e_1$

$\Rightarrow (g \circ g)(e_1) = e_1 \Rightarrow g((g \circ g)(e_1)) = g(e_1) \Rightarrow ((g \circ g)(g(e_1)) = g(e_1) \Rightarrow f(g(e_1)) = g(e_1)$.

De plus $g(e_1) \neq 0_E$ *car sinon* $e_1 = 0_E$ *ce qui est impossible car* e_1 *est un vecteur propre.*

On a donc bien $g(e_1)$ *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* 1.

$\bullet$*De même* $g(e_3)$ *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* 3.

3) Si g *était diagonalisable, alors* $g \circ g = f$ *le serait, donc* A *le serait. Ce qui n'est pas.*

Donc $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Exercice 2

On pose pour tout réel x : $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}dt$

1) Déterminer le domaine de définition D *de* f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Calculer $f(x-1) - f(x)$

4) Montrer que f *est continue sur son domaine.*

5) On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Calculer* $f(0)$

---

1) On pose $I =]0, +\infty[$ et $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & \frac{te^{-tx}}{e^t-1} \end{array}$ pour avoir $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} g(x,t)dt$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I. Il faut regarder les problèmes en 0 et en $+\infty$.

Au voisinage de $t = 0$: $g(x,t) \sim \frac{t}{1+t-1+o(t)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et intégrable sur $]0,1]$.

Au voisinage de $t = +\infty$: $g(x,t) \sim \frac{te^{-tx}}{e^t} = te^{-t(x+1)}$ donc :

Si $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ alors $g(x,t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\int\limits_1^{+\infty} g(x,t)dt$ est divergente.

Si $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$ alors $g(x,t) = o(\frac{1}{t^2})$ et par comparaison à une intégrale de Riemann $\int\limits_1^{+\infty} g(x,t)dt$ est convergente.

On a donc : $\boxed{\text{Le domaine de } f \text{ qui vaut : } D =]-1, +\infty[}$

2) On peut prolonger $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ par 1 en 0. On a alors une fonction continue sur $[0,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$. Alors cette fonction est bornée sur $[0,+\infty[$ et $\exists M > 0\ ,\ \forall t \in I\ ,\ 0 \leq \frac{t}{e^t-1} \leq M$

Alors $0 \leq g(x,t) \leq Me^{-xt}$ et en intégrant entre 0 et $+\infty$: $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée avec paramètre ...

3) Soit $x > 0$, alors $x \in D$ et $x - 1 \in D$ et on a :

$f(x-1) - f(x)$

$= \int\limits_0^{+\infty} [\frac{te^{-t(x-1)}}{e^t-1} - \frac{te^{-tx}}{e^t-1}]dt$

$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}[e^t - 1]dt$

$= \int\limits_0^{+\infty} te^{-tx}dt$

$= \underbrace{[t\frac{-e^{-tx}}{x}]_0^{+\infty}}_{=0} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{x}dt$

$= [\frac{-e^{-tx}}{x^2}]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{x^2}$

On a donc : $\boxed{\forall x > 0\ ,\ f(x-1) - f(x) = \frac{1}{x^2}}$

4) Soit $a \in]0,1[$. Alors : $\forall x \geq a,\ 0 \leq g(x,t) \leq \frac{te^{-ta}}{e^t-1} = g(a,t)$

On a donc :

i) $\forall t \in I\ ,\ x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[$

ii) $\forall x \in [a,+\infty[\ ,\ t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I

iii) $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times I\ ,\ |g(x,t)| \leq g(a,t)$ avec $t \mapsto g(a,t)$ qui est intégrable sur I (car $a \in D$)

Par le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre on en déduit que f est continue sur $[a,+\infty[$.

Comme de plus $\bigcup\limits_{a>-1} [a,+\infty[= D$ alors $\boxed{g \text{ est continue sur } D.}$

5) On a $\sum\limits_{n=1}^{N}(f(n-1) - f(n)) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ en utilisation la relation du 3).

Par télescopage : $f(0) - f(N) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$. Comme avec la question 2) $f(N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :

$\boxed{f(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Planche 7. ccINP *Lilian Garcenot*

Exercice 1

On pose $\varphi(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{exp(-x(1+t^2))}{1+t^2} dt$

1) Montrer que φ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$

2) Montrer que φ *est de classe* C^1 *sur* $]0, +\infty[$

3) Calculer $\varphi(0)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

On pose $A = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

4) Montrer que A *est convergente.*

5) Exprimer, pour $x > 0$, $\varphi'(x)$ *en fonction de* A *et des fonctions usuelles.*

6) Calculer A

---

1) On pose $I = [0, +\infty[$ *et* $\begin{array}{cccc} f & : & I^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & \frac{exp(-x(1+t^2))}{1+t^2} \end{array}$

On pose $\psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ *pour* $t \in I$ *et on a* ψ *qui est intégrable sur* I*.*

On a alors :

i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* I

ii) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I

iii) $\forall (x,t) \in I^2$, $|f(x,t)| \leq \psi(t)$ *avec* ψ *qui est intégrable sur* I*.*

Par le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, on a : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } I = [0, +\infty[}$

2) f *est* C^1 *sur* I^2 *et* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$

Soit $a > 0$*. Alors* $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-a(1+t^2)}$

On pose $\Psi(t) = e^{-a(1+t^2)}$ *qui est intégrable sur* I *et on a alors :*

i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est* C^1 *sur* $[a, +\infty[$

ii) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* I

iii) $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* I

iv) $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \Psi(t)$ *avec* Ψ *qui est intégrable sur* I*.*

Par le théorème de classe C^1 *pour les intégrales à paramètres, on a :* φ *est* C^1 *sur* $[a, +\infty[$ *et* $\forall x \in [a, +\infty[$, $\varphi'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)} dt$

Comme $]0, +\infty[= \bigcup\limits_{a>0} [a, +\infty[$ *alors :*

$$\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[\text{ , } \varphi'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)} dt}$$

3) $\varphi(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ *donc* $\boxed{\varphi(0) = \frac{\pi}{2}}$

$0 \leq \varphi(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\overbrace{e^{-xt^2}}^{\leq 1}}{1+t^2}dt \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+t^2}dt = \frac{e^{-x}\pi}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$

4) A est l'intégrale de Gauss, on a montrer plusieurs fois sa convergence.

5) $\varphi'(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}dt = e^{-x}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$

Changement de variable C^1 *bijectif* $u = \sqrt{x}t$ *:*

$\varphi'(x) = e^{-x}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{x}}$

Donc : $\boxed{\varphi'(x) = \frac{Ae^{-x}}{\sqrt{x}}}$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) - \varphi(0) = \frac{-\pi}{2}$ *(avec la question 3)*

D'autre part : $\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)dx$

$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{Ae^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ *changement de variable* C^1 *bijectif* $u = \sqrt{x}$

$= -A\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}2su$

$= -2A^2$

Donc : $2A^2 = \frac{\pi}{2}$ *et comme* $A > 0$ *alors :* $\boxed{A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Exercice 2

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variable aléatoire indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

1) Déterminer la loi de S_n*.*

2) Calculer $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}x^{n-k}$

Soit N *une variable aléatoire telle que* $N+1$ *suive une loi géométrique de paramètre* p*.*

On considère une urne contenant une boule rouge et une boule verte indiscernable au toucher.
On effectue N *tirages avec remise et on note* X *le nombre de boules vertes tirées.*

3) Déterminer la loi de X*.*

---

1) C'est du cours, S_n suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

2) D'après le cours : $\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

C'est une série entière, on peut dériver autant de fois que l'on veut, terme à terme, sur l'intervalle ouvert de convergence. On a, en dérivant k fois :

$\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{d^k}{dx^k}[\frac{1}{1-x}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^n$

$\Rightarrow \forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^n \Rightarrow \forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^n$

On a donc : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}}$

3) On a, par définition d'une loi géométrique : $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(N=k) = (1-p)^k p$

On remarque que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(N=k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc $\forall k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k \cap N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k|\ N=n)\mathbb{P}(N=n)$

On remarque que $X|_{N=n}$ soit une loi binomiale de paramètre (n,p) (c'est la question 1), donc :

$\mathbb{P}(X=k)$
$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [p^k(1-p)^{n-k}](1-p)^n p$
$= p^{k+1}(1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} ((1-p)^2)^{n-k}$

On utilise alors le 2) :

$\mathbb{P}(X=k)$
$= p^{k+1}(1-p)^k \frac{1}{(1-(1-p)^2))^{k+1}}$
$= p^{k+1}(1-p)^k \frac{1}{(2p-p^2))^{k+1}}$
$= (1-p)^k \frac{1}{(2-p))^{k+1}}$
$= \frac{1}{2-p}[\frac{1-p}{2-p}]^k$

$\boxed{\text{La loi de probabilité de } X \text{ est donc donnée par : } X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2-p}[\frac{1-p}{2-p}]^k}$

Remarque : $X+1$ suit une loi polynomiale de paramètre $\frac{1}{2-p}$

Planche 8. ccINP *Hangard Eloy*

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante, positive de limite nulle.*
1) Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ `est` *convergente.*
`On cherche à montrer l'égalité :` $\int\limits_0^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}dt = \frac{-\pi ln(2)}{2}$
2) Montrer que l'intégrale est convergente.
3) Montrer que : $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}$
4) Etudier la convergence uniforme `de` *:* $t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}$
5) `Montrer l'égalité voulue.`

---

1) Question de cours : c'est le début du TSCACSA !!!

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}$ est une série alternée avec $(\frac{1}{n^2+t^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante donc, on peut appliquer le 1) et la série est convergente.
De plus, par le TSCACSA : $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$
Comme $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors par comparaison $t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc l'intégrale est convergente.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}dt$
$= \frac{1}{n^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{t}{n})^2}dt$ changement de variable C^1 bijectif $u = \frac{t}{n}$
$= \frac{1}{n^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}ndu$
$= \frac{1}{n}[arctan(u)]_0^{+\infty}$
$= \frac{\pi}{2n}$ On a bien : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}}$

4) Posons $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}$ et $S_N(t) = \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}$
Alors par le TSACSA : $|S(t) - S_N(t)| \leq \frac{1}{(N+1)^2+t^2} \leq \frac{1}{N^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

La série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}$ converge donc uniformément vers S sur $[0,+\infty[$

5) $I=\int\limits_0^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}dt$

$=\int\limits_0^{+\infty}[\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}+\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}]dt$

$=\sum\limits_{n=1}^{N}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}dt+\underbrace{\int_0^{+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}dt}_{R_N}$

$=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n\pi}{2n}+R_N$

En réutilisant le TSACSA : $|R_n|\leq\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(N+1)^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2(N+1)}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$

On en déduit : $I=\frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

On utilise que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-ln(2)$ et on obtient : $\boxed{\int\limits_0^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+t^2}dt=\frac{-\pi ln(2)}{2}}$

Exercice 2

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espace vectoriel `de dimension finie` et G un sous espace vectoriel de E.
On pose : $A=\{u\in L(E,F)\ ,\ G\subset ker(u)\}$
1) Montrer que A est un sous espace vectoriel de $L(E,F)$
2) Donner la dimension de A.

---

1) $0_{L(E,F)}$ est bien dans A. Soit u et v sont dans A, et si $\lambda\in\mathbb{R}$.
Si $a\in A$, $(u+\lambda v)(a)=u(a)+\lambda v(a)=0_F+\lambda 0_F=0_F$ donc $A\subset ker(u+\lambda v)$ et $u+\lambda v\in A$
On a donc bien A qui est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.

2) Soit $(e_1,\dots,e_p)$ avec $p=dim(A)$ une base de A, que l'on complète en $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de E (avec $n=dim(E)$).
Soit $m=dim(F)$. Soit B' une base de F.
Alors, si $u\in A$, alors la matrice de u relativement à B et B' est de la forme : $\begin{pmatrix}0 & K\end{pmatrix}$ avec $K\in M_{n-p,m}$.
La réciproque est directe.

On en déduit : $\boxed{dim(A)=(n-p)m=(dim(E)-dim(A))dim(F)}$

Planche 9. ccINP *Morin Nathan*

Exercice 1

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, *on pose :*

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et démontrer qu'elle converge vers* 0.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$$

Justifier la convergence de la série $\sum v_n$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Étudier la convergence de la série $\sum w_n$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Étudier la convergence de la série $\sum x_n$.

---

1) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ *est une série alternée, convergente car* $(\frac{1}{\sqrt{k}})$ *est décroissante de limité nulle.*
(u_n) *est la suite des restes, donc* $\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2) Par le théorème spécial, $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ *et donc* $|v_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$
Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série de Riemann convergente alors, par comparaison,* $\sum v_n$ *est absolument convergente donc convergente.*

3) Posons $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ *alors :*
$w_n = \frac{(-1)^n}{n}[S - u_n] = S\frac{(-1)^n}{n} - v_n$
Comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *est une série alternée convergente (car* $(\frac{1}{n})$ *est décroissante de limite nulle) et que* $\sum v_n$ *est convergente (par la 2) alors* $\boxed{\sum w_n \text{ est convergente.}}$

4) Par le TSACSA, $\sum\limits_{k=1}^{+n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ *est une série convergente de limite positive.*
Donc $\exists C > 0$, $x_n \sim \frac{C}{n}$
Par Riemann, on a alors : $\boxed{\sum x_n \text{ divergente.}}$

Exercice 2

Soient $n \geqslant 2$, et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On définit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice par blocs de la façon suivante : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$, où 0_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, si A et B sont sont semblables, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.*
2. *Soit $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de M^k.*
3. *En déduire une expression par blocs de la matrice $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et A.*
4. *Montrer que si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable.*
5. `Étudier la réciproque`

6. *Montrer que si M est diagonalisable alors A est nulle.*

---

1) A et B semblable $\Rightarrow \exists Q \in Gl_n(\mathbb{R})$, $A = QBQ^{-1}$
Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = QB^kQ^{-1}$, puis par linéarité $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) = QP(B)Q^{-1}$ et donc $\boxed{P(A) \text{ et } P(B) \text{ sont semblables.}}$

2) $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$, puis, par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}}$

3) Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ alors, $P(M) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} a_k M^k & \sum_{k=0}^{N} k a_k M^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{N} a_k M^k \end{pmatrix}$

et donc $\boxed{P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}}$

4) M diagonalisable
$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple tel que : $P(M) = 0$ `[on utilise l'expression du 3) ]`
$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple tel que : $P(A) = 0$
$\Rightarrow A$ est diagonalisable

On a donc : $\boxed{M \text{ diagonalisable} \Rightarrow A \text{ diagonalisable.}}$

5) Si $A = I_2$ alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On a A diagonalisable et M qui ne l'est pas car M n'admet qu'une seule valeur propre et M n'est pas diagonale. $\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

6) Si M est diagonalisable, alors d'après 4), A est aussi diagonalisable et donc A est semblable a une matrice du type : $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
M diagonalisable donc il existe un polynôme annulateur de M scindé simple tel que $P(M) = 0$
Avec l'expression du 2) : $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$, avec le 1) : $P(D) = DP'(D) = 0$ et comme D est diagonale on a : $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $P(\lambda_k) = \lambda_k P'(\lambda_k) = 0$
Par l'absurde : SI $\lambda_k \neq 0$ alors $P(\lambda_k) = P'(\lambda_k) = 0$ et donc λ_k est racine d'ordre au moins 2, ce qui contredit le fait que P soit à racine simple. ABSURDE On a donc $\lambda_k = 0$
Toute les λ_k sont donc nuls, donc D est nulle, donc A est nulle.

---

2 Mines télécom

Planche 10. Mines-Télécom *Quentin Meyzonnier*

Exercice 1
On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(n+1)x^n$ *et on note* R_S *le rayon de convergence de cette série entière.*
1) Déterminer R_S
On pose $U(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln(1+\frac{1}{n})x^n$
2) Montrer que : $\forall x \in]-R, R[$, $(1-x)S(x) = U(x)$
3) Montrer que U *est continue sur* $[-1, 1[$
4) Déterminer les limites de S *et en* 1 *et* -1

---

1) Par comparaison puissance-ln : $|x| < 1 \Rightarrow ln(n+1)x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
On a aussi : $|x| \geq 1 \Rightarrow ln(n+1)x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Comme $R = sup(\{x \in \mathbb{R}\ ,\ ln(n+1)x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$ *alors, on en déduit :* $\boxed{R = 1}$

2) $\forall x \in]-R, R[$,
$(1-x)S(x)$
$= (1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(n+1)x^n$
$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(n+1)x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(n+1)x^{n+1}$
$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln(n+1)x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ln(n+1)x^{n+1}$
$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln(n+1)x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln(n)x^n$
$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [ln(n+1) - ln(n)]x^n$
$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [ln(1+\frac{1}{n})]x^n$
$= U(x)$ *On a donc :* $\boxed{\forall x \in]-1, 1[\ ,\ (1-x)S(x) = U(x)}$

3) $\bullet$ *U est une série entière de rayon de convergence $R = 1$ donc U est continue sur $]-1,1[$.*

$\bullet$ *On va maintenant montrer la continuité en -1 (et donc la convergence de $U(-1)$)*

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} u_n & : & [-1,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ln(1+\frac{1}{n})x^n \end{array}$

On a alors, comme $x < 0$, $u_n(x) = (-1)^n |u_n(x)| = (-1)^n ln(1+\frac{1}{n}) |x|^n$

Alors, pour $x \in [-1,0[$, la suite $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car $|x| \leq 1$ et de limite nulle, on peut donc appliquer le théorème spéciale.

La série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, converge donc simplement sur $[-1,0[$ vers une fonction que l'on a notée U. (au passage on a montré la convergence de $U(-1)$

La suite du théorème spécial donne : $\forall x \in [-1,0[$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \leq |u_{N+1}(x)| \leq |x|\, ln(1+\tfrac{1}{N+1}) \leq ln(1+\tfrac{1}{N+1}) \text{ car } |x| \leq 1$$

On a donc $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \leq \underbrace{ln(1+\dfrac{1}{N+1})}_{\text{ne dépend pas de } x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge donc uniformément vers U sur $[-1,0[$
Comme les u_n sont continues sur $[-1,0[$, alors, par le théorème sur la continuité des séries de fonctions on a U continue sur $[-1,0[$

$\bullet$ *U est continue sur $]-1,1[$ et sur $[-1,0[$ et donc* $\boxed{U \text{ est continue sur } [-1,1[}$

4) $\bullet$ *Comme U est continue en -1, alors :* $\lim\limits_{x\to-1^+} U(x) = U(-1) < 0$ *(signe d'après le TSACSA) et comme* $S(x) = \frac{U(x)}{1-x}$ *on en déduit :* $\lim\limits_{x\to-1^+} S(x) = \frac{U(-1)}{2}$

$\bullet$ *On a, pour $x > 0$:* $U(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{ln(1+\dfrac{1}{n})x^n}_{\geq 0} \geq \sum\limits_{n=1}^{1} ln(1+\frac{1}{n})x^n = ln(2)x$

Donc : $S(x) = \frac{U(x)}{1-x} \geq \frac{ln(2)x}{1-x} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$ *donc par comparaison* $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} S(x) = +\infty}$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Soit $f \in L(E)$ tel que : $(f - Id_E) \circ (f^2 + Id_E) = 0_{L(E)}$ **et** *$f \neq Id_E$*
1) Montrer que $ker(f - Id_E)$ et $ker(f^2 + Id_E)$ sont supplémentaires dans E.
2) Montrer que si E est de dimension 3, alors, il existe une base B dans laquelle la matrice de f **est** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

---

1) On pose $F = ker(f - Id_E)$ et $G = ker(f^2 + Id_E)$
• Soit $x \in F \cap G$
Alors $x \in F \Rightarrow f(x) = x$ et $x \in G \Rightarrow f^2(x) + x = 0_E$
$x = f(x) \Rightarrow f(x) = f^2(x) \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0_E$
On a donc $F \cap G = \{0_E\}$

• Soit $x \in E$
Recherche : $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G \Rightarrow f^2(x) = a - b$ donc $a = \frac{x+f^2(x)}{2}$ et $b = \frac{x-f^2(x)}{2}$
Rédaction : On pose $a = \frac{x+f^2(x)}{2}$ et $b = \frac{x-f^2(x)}{2}$
On a bien : $a + b = x$ et f vérifie : $f^3 - f^2 + f - Id_E = 0 \Rightarrow f^3 = f^2 - f + Id_E$

De plus $f(a) = \frac{f(x)+f^3(x)}{2} = \frac{f(x)+f^2(x)-f(x)+x}{2} = \frac{f^2(x)+x}{2} = a$ donc $a \in F$

$f^2(b) = \frac{f^2(x)-f^4(x)}{2}$
$= \frac{f^2(x)-f(f^3(x))}{2}$
$= \frac{f^2(x)-f(f^2(x)-f(x)+x)}{2}$
$= \frac{f^2(x)-f^3(x)+f^2(x)-f(x)}{2}$
$= \frac{f^2(x)-[f^2(x)-f(x)+x]+f^2(x)-f(x)}{2} = \frac{-f^2(x)-x}{2} = -b$ donc $b \in G$ (calculs à vérifiés)

Donc $x = a + b$ avec $a \in F$, $b \in G$ donc $E \subset F + G$ et donc $F + G = E$

• Finalement $\boxed{F \oplus G = E}$

2) Soit $e \in G$ non nul.
Montrons que $(e, f(e))$ est libre.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\alpha e + \beta f(e) = 0_E$
En composant par f, comme $e \in G$ alors : $\alpha f(e) - \beta e = 0_E$
Par combinaison linéaire des deux égalités :
$\alpha(\alpha e + \beta f(e)) - \beta(\alpha f(e) - \beta e) = 0_E$
$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)e = 0_E$
$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2) = 0$
$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$
Donc la famille $(e, f(e))$ est libre.
On en déduit que $dim(G) = 0$ ou $dim(G) \geq 2$

De plus G est stable par f, donc $\varphi = f|_G$ vérifie $\varphi^2 = -Id_G$
En prenant le déterminant $det(\varphi^2) = det(\varphi)^2 = (-1)^{dim(G)}$ et donc, avec le signe $dim(G)$ est paire.
Donc $dim(G) = 0$ ou $dim(G) = 2$
De plus $f \neq Id_E$ donc $dim(F) < 3$
On a aussi : $E = F \oplus G$ et donc $\underbrace{dim(F)}_{<3} + \underbrace{dim(G)}_{0 \text{ ou } 2} = 3$
$dim(G) = 0$ est impossible car sinon $dim(F) = 3$, on a donc $dim(G) = 2$ et $dim(F) = 1$

Soit (e_1) une base de F. Si on prend e_2 non nul dans G, on a montrer que l'on avait $(e_2, f(e_2))$ était une base de G.

Finalement, par concaténation de bases adaptées à la somme directe : $E = F \oplus G$ on a $(e_1, e_2, f(e_2))$ qui est une base dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Planche 11. Mines-Télécom *Nathan Morin*

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0; \pi[\\ \forall n \in \mathbb{N} \, , \; u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
2. (a) *Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{1}{{u_{n+1}}^2} - \dfrac{1}{{u_n}^2} \right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

   (b) *On admet le théorème de Césaro :*
   si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $B_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ converge également vers ℓ.

   Étudier la série de terme général u_n.
3. *Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.*

---

1) Comme $sin([0,\pi]) \subset [0,1] \subset [0,\pi]$ alors : $\forall n \in \mathbb{N} \, , \; u_n \in [0,\pi]$
On sait que $\forall x \geq 0 \, , \; sin(x) \leq x$
donc $\forall n \in \mathbb{N} \, , \; sin(u_n) \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$
Donc (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers une solution de $sin(x) = x$.
Comme 0 est la seule solution de cette équation alors :

$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et converge vers } 0}$

2)a) Comme u_n tend vers 0.

$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$
$= \frac{1}{sin(u_n)^2} - \frac{1}{u_n^2}$
$= \frac{1}{(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^2} - \frac{1}{u_n^2}$
$= \frac{1}{u_n^2}\frac{1}{(1-\frac{u_n^2}{6}+o(u_n^3))^2} - \frac{1}{u_n^2}$
$= \frac{1}{u_n^2}(1 + \frac{2u_n^2}{6} + o(u_n^3)) - \frac{1}{u_n^2}$
$= \frac{1}{3} + o(u_n)$

On a donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}}$

2)b) Par le théorème admis de Césaro et avec télescopage :

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_k^2}) = \frac{1}{n}[\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1}] \sim \frac{1}{3}$

Donc $\frac{1}{nu_n^2} \sim \frac{1}{3}$ *et donc, comme* $u_n > 0$ *:* $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$

Avec Riemann, on en déduit que : $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente.}}$

3) Pour $z \neq 0$ *on pose* $a_n = u_n z^n \neq 0$

Donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| \sim \frac{\sqrt{\frac{3}{n}}}{\sqrt{\frac{3}{n}}}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|$

Alors, par la règle de D'Alembert pour les séries numériques :
$|z| < 1 \Rightarrow \sum u_n z^n$ *convergente et* $|z| > 1 \Rightarrow \sum u_n z^n$ *divergente*

On en déduit que : $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum u_n z^n \text{ vaut } R = 1}$

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
Soit l'application f définie par : $\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

1. *Montrer que f est un endomorphisme. Est-il injectif ? surjectif ?*

   `On suppose de plus que` B `est une base orthogonale.`

2. *Montrer que f est symétrique. À quelle(s) condition(s) f est-il un projecteur ?*

---

1) $< x+\lambda y, e_i >=< x, e_i > +\lambda < y, e_i >$ donc $f(x+\lambda y) = f(x)+\lambda f(y)$ et $f(E) \subset E$ donc f est une endomorphisme de E.

$x \in ker(f) \Rightarrow f(x) = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i = 0_E$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, alors : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $< x, e_i >= 0$
Donc $x \in Vect((e_i)_{i\in[\![1;n]\!]})^{\perp} \Rightarrow x \in E^{\perp} = \{0_E\}$ Donc $ker(f) = \{0_E\}$, donc f injective et comme f est un endomorphisme alors f est un automorphisme.

2) Si de plus que B est une orthogonale.
Alors $f(e_k) =< e_k, e_k > e_k$
On pose $e'_k = \frac{e_k}{||e_k||}$ ainsi $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base orthonormée.
Alors $f(e'_k) = \frac{1}{||e_k||} f(e_k) = \frac{1}{||e_k||} < e_k, e_k > e_k =< e_k, e_k > e'_k$
La matrice de f relativement à la base orthonormée B' est donc $diag((< e_k, e_k >))$ qui est symétrique donc $\boxed{f \text{ est symétrique.}}$

f est un projecteur $\Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!]$, $< e_k, e_k >= 1$

Donc f est un projecteur si de plus B est orthonormée. (et on a alors $f = Id_E$)

Planche 12. Télécom *Titouan Séguy*

Exercice 1
Soit A dans $M_n(\mathbb{R})$ admettant $X^3 - 3X - 5$ comme polynôme annulateur.
Montrer que : $det(A) > 0$.

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 - 3t + 5$
f est C^∞ et $f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1)$ D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	-	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit qu'il existe une unique valeur réelle α telle que : $f(\alpha) = 0$. De plus cette racine est simple. Comme $f(0) = -5$ on en déduit $\alpha > 0$.

On sait que si P est un polynôme annulateur de A alors le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.
A admet donc au plus une valeur propre réelle.

$f(t) = 0$ admet aussi une racine complexe λ et comme $f(t)$ est un polynôme à coefficients réels alors $sp(A) \subset \{\alpha, \lambda, \overline{\lambda}\}$

Soit k l'ordre de multiplicité de λ comme valeur propre de A et k' l'ordre de multiplicité de α comme valeur propre de A.
Comme A est réelle, alors λ et $\overline{\lambda}$ ont même ordre de multiplicité.
Alors $det(A) = \alpha^{k'}\lambda^k\overline{\lambda}^k = \alpha^{k'}(|\lambda|^2)^k > 0$

On a bien : $\boxed{det(A) > 0}$

Exercice 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$
a) Montrer que u_n est bien définie.
b) Etudier $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

---

a) $x \mapsto \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$. Problème en 0 pour u_n.
Mais, au voisinage de 0 : $\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$
Comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ alors, par équivalent, $x \mapsto \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ et donc $\boxed{u_n \text{ est bien définie.}}$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$

Comme $x \in]0,1[\Rightarrow 1-x \in]0,1[$ alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$
De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1[$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable sur $]0,1]$
Les f_n étant continues par morceaux sur $]0,1[$, on a vérifié toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Remarque : $\forall x \in]0,1[$, $0 \leq 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $0 \leq (1-x)^n \leq \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$
En intégrant enntre 0 et 1, comme les intégrales sont convegente : $0 \leq \int_0^1 (1-x)^n dx \leq u_n$
donc $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq u_n$ et donc, par règle de comparaison, comme $\sum \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divegente, alors $\sum u_n$ est divergente.

---

3 Centrale

3.1 Centrale : mathématiques 1

Planche 13. Centrale Math 1 *Nathan Morin*

1. $\forall x \geqslant 0$, *démontrer la convergence de l'intégrale* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2+t^2}$ *et calculer sa valeur.*
2. *Soit* α *un réel positif.*
   (a) $\forall n \geqslant 1$, *on définit* $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$.
   À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{\tan(t)}$, *calculer la valeur de* I_n.
   (b) *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* α `pour que` $\sum I_n$ *soit convergente.*

---

1) $\int_0^A \dfrac{1}{1+x^2+t^2}dt = \int_0^A \dfrac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}})^2}dt = [\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}arctan(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}})]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) \text{ convergente et } F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}}$

2)a) I_n est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment donc I_n est convergente.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha \sin^2(t)} \quad \text{changement de variable } u = \pi - t$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{-\mathrm{d}u}{1+n^\alpha\pi^\alpha \sin^2(u)}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+n^\alpha\pi^\alpha \sin^2(u)}$$

On a donc : $I_n = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha\pi^\alpha \sin^2(t)}$

Dans I_n on effectue le changement de variable C^1 bijectif $u = \frac{1}{tan(t)} = \frac{cos(t)}{sin(t)}$, $\frac{du}{dt} = \frac{-sin(t)sin(t)-cos(t)cos(t)}{sin^2(t)} = (-1-u^2)$

$sin^2(t) = \frac{sin^2(t)}{cos^2(t)+sin^2(t)} = \frac{1}{\frac{cos^2(t)+sin^2(t)}{sin^2(t)}} = \frac{1}{u^2+1}$

On a donc : $I_n = 2\int\limits_{+\infty}^{0} \frac{\frac{-du}{1+u^2}}{1+n^\alpha\pi^\alpha\frac{1}{1+u^2}} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha} = 2F((n\pi)^{\alpha/2}) = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^\alpha\pi^\alpha}}$

Bilan : $\boxed{I_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^\alpha\pi^\alpha}}}$

2)b) Si $\alpha = 0$, (I_n) est constante égale à $\int\limits_0^\pi \frac{1}{1+sin^2(t)}dt \neq 0$, donc $\sum I_n$ est divergente.
Si $\alpha > 0$, alors $I_n \sim \frac{1}{\pi^{\alpha/2}n^{\alpha/2}} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ est convergente (par Riemann) si et seulement si $\alpha/2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$

On a donc : $\boxed{\sum I_n \text{ convergente si et seulement si } \alpha > 2}$

Planche 14. Centrale Math 1 *Titouan Séguy*

On dispose de boules indiscernables au toucher. On départ on a $N \geq 2$ boules rouges dans l'urne.
On tire une boule, si elle est rouge on la remplace par une boule verte, sinon on la remet dans l'urne.
On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges après n tirage.

1.a) Montrer que : $P(X_{n+1} = k) = \frac{N-k}{N}P(X_n = k) + \frac{k+1}{N}P(X_n = k+1)$
1.b) Trouver une formule liant $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1})$
1.c) Exprimer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de N et de n.

---

a) On remarque pour commencer, qu'il y a toujours N boules dans l'urne et que : $X_n(\Omega) \subset [\![0; N]\!]$

Remarque : en fait on a : $X_0 = N$ car c'est la composition initiale de l'urne, et comme au premier tirage on a une boule rouge, que l'on remplace par une verte, alors $X_n(\Omega) \subset [\![0, N-1]\!]$ pour $n \geq 1$
On a même $X_2(\Omega) =]\!]N-2; N-1]\!])$, $X_3(\Omega) = [\![N-3, N-1]\!]$ si $N \geq 3$.
Il faut $n \geq N$ pour avoir $X_n(\Omega) = [\![0; N-1]\!]$

Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (associé à X_n) $(X_n = j)_{j\in[\![0;N]\!]}$ on a, pour $k \in [\![0; N]\!]$:

$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum\limits_{j=0}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = j)\mathbb{P}(X_n = j)$

Mais pour avoir $X_{n+1} = k$ il faut $X_n \in \{k+1, k\}$ puisque, à chaque tirage, on enlève une boule rouge ou on ne change rien.

On a donc :
$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k)\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1)$

Lorsque $X_n = k$ la composition de l'urne est : k boules rouge et $N-k$ boules vertes. Donc par équiprobabilité : $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{\text{nb de boules vertes}}{\text{nb de boules}} = \frac{N-k}{N}$

Lorsque $X_n = k+1$ la composition de l'urne est : $k+1$ boules rouge et $N-(k+1)$ boules vertes. Donc par équiprobabilité : $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{\text{nb de boules rouges}}{\text{nb de boules}} = \frac{k+1}{N}$

On a donc : $\boxed{\forall k \in [\![0;N]\!]\ ,\ \mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\frac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)}$

b) On écrit la relation du a) d'une autre manière :
$\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\mathbb{P}(X_n=k)-\frac{k}{N}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)$
On multiplie par k :
$k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=k\mathbb{P}(X_n=k)-\frac{k^2}{N}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{k(k+1)}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)$
$\Rightarrow k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=k\mathbb{P}(X_n=k)-\frac{k^2}{N}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{(k+1-1)(k+1)}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)$
$\Rightarrow k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=k\mathbb{P}(X_n=k)-\frac{k^2}{N}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{(k+1)^2}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)-\frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)$

On somme de $k=0$ à $k=N$:

$\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X_{n+1}=k)$
$=\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X_n=k)+\sum_{k=0}^{N}[-\frac{k^2}{N}\mathbb{P}(X_n=k)+\frac{(k+1)^2}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)]-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}(k+1)\mathbb{P}(X_n=k+1)$
On reconnaît des espérances et une somme télescopique :
$\mathbb{E}(X_{n+1})$
$=\mathbb{E}(X_n)-\frac{0^2}{N}\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{(N+1)^2}{N}\underbrace{\mathbb{P}(X_n=N+1)]}_{=0}-\frac{1}{N}\mathbb{E}(X_n)$

On a donc : $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1})=\frac{N-1}{N}\mathbb{E}(X_n)}$

c) $(\mathbb{E}(X_n))$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $\mathbb{E}(X_0)=N$ car il y a N boules rouges avant le premier tirage.

On a donc : $\boxed{\mathbb{E}(X_n)=N(\frac{N-1}{N})^n}$
