# Feuille d'exercices posés aux oraux blancs PSI* 2024 par Mr Charitat, série 4 et 5

---

# Planche 8 : Mines-Télécom

**Exercice 1**

On définit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t} dt$

1. La fonction $t \mapsto arctan(t)$ est-elle développable en série entière en $0$ ?

2. Montre que $F$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$

3. Déterminer la limite de $F$ en $0$

4. Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$

**Exercice 2**

1. On pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

   Calculer $(M(a,b))^2$. $M(a,b)$ est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

# Planche 9 : ccINP

**Exercice 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} (\int\limits_0^1 P(s)s^k ds)X^k \end{array}$

1) Montre que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer que $f$ est diagonalisable.

3) Montre que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Soit $M_n$ la matrice de $f_n$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $Y^T M_n Y$ pour $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
En déduire que $f_n \in S^{++}(\mathbb{R}_n[X])$

5) On note $\lambda_n$ la plus petite valeur propre de $f_n$. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$

**Exercice 2**

Soit $f$ définie sur $I = ]0, 1[$ par $f(x) = \frac{ln(x)}{x-1}$
1) Vérifier que $f$ est prolongeable par continuité en 1.
2) Justifier l'intégrabilité de $f$ sur $I$.
3) Donnez, au voisinage de 1, un développement de $f$ en série entière.
4) Calculer l'intégrale de $f$ sur $I$.

# Planche 10 : ccINP

**Exercice 1**

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2+xy-2x-y+2 \end{array}$

a) Montrer que $f$ admet un unique point critique.
b) Montrer que $f$ admet un minimum local en ce point.
Est-ce un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ ?
c) $f$ admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ ?
On note $\Sigma$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$
d) Montrer que tout les points de $\Sigma$ sont réguliers.
e) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\Sigma$ au point $A(1,1,f(1,1))$

**Exercice 2**

Soit $A$ une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$ $(A = -A^T)$.
a) Montrer que $I_n - A$ est inversible.
b) Soit $M = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$.
c) Calculer $det(M)$.

# Planche 11 : Mines-Télécom

**Exercice 1**

On pose : $\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & exp(-x^2) \end{array}$

On admet que $\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \sqrt{\pi}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $H_n$, tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$
Préciser le degré et le coefficient dominant de $H_n$.
2) Montrer que l'application $(P,Q) \longmapsto < P,Q >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\varphi(t)dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
3 )Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ < H_n, P >=< P', H_{n-1} >$
En déduire que la famille $(H_n)$ est orthogonale.
4) Calculer $||H_n||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2**

Soient $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 3 et $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $a \in \mathbb{C}$
On considère $f \in L(E)$ vérifiant : $f(e_1) = f(e_3) = u$ avec $u = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f(e_2)$

1) Donner une base de l'image et une base du noyau de $f$.
2) Donnez la matrice $A$ de $f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$.
3) Calculez $A^2$. Qu'en déduire ?
4) Quelles sont les valeurs propres de $f$ ?
$f$ est-il inversible ? diagonalisable ?

# Planche 12 : Mines-Télécom

### Exercice 1

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - ln(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in ]0, 1]$

2) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

3) Montrer que : $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$

4) Donner un équivalent de $x_n - e^{-n}$

### Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $a + c = b + d = 1$.
et $f$ l'endomorphisme associé.
1) Montrer que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$
2) Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ et préciser la valeur propre associé.
3) Montrer que si $v$ est un vecteur propre de $A$ non colinéaire à $u$, alors ce vecteur propre est associé à la valeur propre 1.

# Planche 13 : Mines-Télécom

**Exercice 1**

On considère un avion ayant $n \geq 2$ places passagers numérotés de 1 à $n$.
$n$ passagers numérotés de 1 à $n$ embarquent en arrivant dans l'ordre de leur numéro. (1, puis 2, ..., $n-1$ et enfin $n$)
Chaque passager est censé s'installer à la place correspondant à son numéro.
Le premier est passager est distrait et s'assoit à la place $X$ avec $X$ qui suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Ensuite, chaque passage s'assoit à sa place si elle est libre, dans le cas contraire, il s'installe à une des places restantes de manière équiprobable.
On note $A_n$ l'événement : "le n-ième passager s'assoit à sa place"

Déterminer la probabilité de $A_n$.

**Exercice 2**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de $A$.

2) Etudier la diagonalisibilité de $A$.

# Planche 14 : Mines-Télécom

**Exercice 1**

1) Soient $c \in \mathbb{R}^+$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , $P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}$

1) Touver la valeur de $c$.

2) David et Claude jouent à un jeu.
Si $X$ prend une valeur paire, David donne $k$ euros à Claude.
Si $X$ prend une valeur impaire $k$ , Claude donne $k$ euros à David.

Déterminer l'espérance de gain de Claude.

**Exercice 2**

1) Soit $x > 0$. On définit $\varphi$ sur $I = [1, +\infty[$ par $\forall t \in I$ , $\varphi(t) = \frac{1}{t(t+x)}$
Montrer que $\varphi$ est intégrable sur $I$ et calculer $\int\limits_I \varphi$

2) On pose pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{n(n+x)}$
Quel est le domaine de définition de $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ?

3) Etudier la continuité de $f$.

4) Etudier la dérivabilité de $f$.

# Planche 15 : Centrale Math 1

**Exercice**

On pose : $\begin{array}{cccc} \Phi & : & (M_3(\mathbb{R}))^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A,B) & \longmapsto & tr(A^T B) \end{array}$

a) Montrer que $\Phi$ est un produit scalaire.
Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ et $A_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
Donner l'expression de $S(M)$ symétrie orthogonale de $M$ par rapport à $S_3(\mathbb{R})$.
b) Soit $A$ une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$. Soit $S_A$ sa projection othogonale sur $S_3(\mathbb{R})$ et $Sp(S_A)$ son spectre. Montrer que : $1 \in Sp(S_A) \subset [-1,1]$

**Exercice bonus**

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$ simplement scindé.
Montrez que $P'$ est simplement scindé.
2) Le polynôme $P = 8X^8 + 7X^7 + 4X^4 + +3X^3 + 2019X^2 + 2018X + 666$ est-il simplement scindé sur $\mathbb{R}$ ?

# Planche 16 : Centrale Math 2

**Exercice**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int\limits_0^n (1 - \frac{t}{n})^n ln(t) dt$.

1) Justifier l'existence de $u_n$.

2) Représenter en utilisant la méthode des trapèzes, les point $((n, u_n))_{1 \leq n \leq 50}$. Que conjecturez vous ?

3) Soit $A = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} l(t) dt$. Justifier l'existence de $A$ et montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = A$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

4) Représenter graphiquement les point $((n, v_n))_{1 \leq n \leq 50}$. Que conjecturez vous ?

5) Démontrer votre conjecture.

# Planche 17 : Mines-Télécom

**Exercice 1**

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - ln(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in ]0, 1]$

2) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

3) Montrer que : $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$

4) Donner un équivalent de $x_n - e^{-n}$

**Exercice 2**

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $a + c = b + d = 1$.
et $f$ l'endomorphisme associé.
1) Montrer que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$
2) Montrer que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A$ et préciser la valeur propre associé.
3) Montrer que si $v$ est un vecteur propre de $A$ non colinéaire à $u$, alors ce vecteur propre est associé à la valeur propre 1.

# Planche 18 : Centrale Math 1

### Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $P_n = \prod_{k=0}^{n} (X - i)$

1) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} ln(n)$
2) Montrer que $P'$ admet une unique racine sur $]0, 1[$ que l'on notera $\lambda_n$
3) Simplifier $\frac{P_n'}{P_n}$
4) Donner un équivalent de $\lambda_n$

### Exercice bonus

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose : $\begin{array}{rccc} \Phi & : & M_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_3(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & tr(A)M + tr(M)A \end{array}$

L'endomorphisme $\Phi$ est-il diagonalisable ? Donnez le polynôme caractéristique et la trace de $\Phi$.