

# Chapitre 8 : Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre  $E$  désigne un  $K$  espace vectoriel de dimension quelconque avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ .

## 1 Norme

### 1.1 Définition

**Définition.** On dit qu'une application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est une *norme* sur  $E$  si et seulement si  $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K$  :

1.  $N(x) \geq 0$  (*positivité*)
2.  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$  (*homogénéité*)
3.  $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$  (*séparation*)
4.  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (*inégalité triangulaire*)

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel muni d'une norme  $N$  alors on dit que  $(E, N)$  est un espace vectoriel normé.

**Remarques.** Si  $N(x) = 1$  alors on dit que  $x$  est *unitaire*. Autre notation :  $N(x) = \|x\|$

### 1.2 Premières propriétés

**Propriétés.** Soit  $(E, N)$  un  $K$  espace vectoriel normé. Alors

1.  $N(0_E) = 0$
2.  $\forall x \in E, N(-x) = N(x)$
3.  $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$  (*deuxième inégalité triangulaire*)

preuve :

### 1.3 Cas particulier : norme euclidienne

**Lemme.** Si  $(E, \langle, \rangle)$  est un espace préhilbertien alors la norme euclidienne ( $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ) est une norme.

**Remarque.** Toutes les normes ne sont pas euclidiennes.

preuve :

## 2 Normes usuelles sur $K^n$

### 2.1 Norme 1

**Définition.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose :  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n, N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$

Alors :  $N_1$  est une norme sur  $K^n$  appelée "norme 1".

**Remarques.** Dans le cas particulier  $K = \mathbb{R}$  et  $n = 1$ , on retrouve la valeur absolue qui est donc une norme sur  $\mathbb{R}$ . Dans le cas particulier  $K = \mathbb{C}$  et  $n = 1$ , on retrouve le module qui est donc une norme sur  $\mathbb{C}$ . Même si  $K = \mathbb{R}$ , cette norme n'est pas euclidienne pour  $n \geq 2$ . (preuve en exo)

preuve :

### 2.2 Norme 2

**Définition.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose :  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n, N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$

Alors  $N_2$  est une norme sur  $K^n$  appelée "norme 2".

**Remarque.** Si  $K = \mathbb{R}$ , c'est la norme associée au produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ , c'est donc une norme euclidienne.

preuve :

## 2.3 Norme infinie

**Définition.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose :  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ,  $N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Alors  $N_\infty$  est une norme sur  $K^n$  appelée "norme infinie".

preuve :

**Remarques.** Dans le cas particulier  $K = \mathbb{R}$  et  $n = 1$ , on retrouve la valeur absolue qui est donc une norme sur  $\mathbb{R}$ . Dans le cas particulier  $K = \mathbb{C}$  et  $n = 1$ , on retrouve le module qui est donc une norme sur  $\mathbb{C}$ . Pour  $n \geq 2$ , ce n'est pas une norme euclidienne.

## 2.4 Extension

Si  $E$  est un  $K$  espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et si  $B = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  alors on peut poser :  $N_{1,B}(x) = N_1((x_1, \dots, x_n))$ ,  $N_{2,B}(x) = N_2((x_1, \dots, x_n))$  et  $N_{\infty,B}(x) = N_\infty((x_1, \dots, x_n))$  et on définit ainsi trois normes sur  $E$ .

## 3 Autres normes usuelles

### 3.1 Sur $M_n(K)$

En identifiant  $M_n(K)$  avec  $K^{n^2}$ , on peut appliquer les résultats du paragraphe précédent et obtenir les normes

$$\text{suivantes : pour } A = (a_{ij}) \in M_n(K) : \begin{cases} N_1(A) = \|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ N_2(A) = \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \\ N_\infty(A) = \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \end{cases}$$

**Remarques.** Si  $K = \mathbb{R}$  alors  $N_2(A) = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$  qui est une norme euclidienne.

Si  $K = \mathbb{C}$  on peut remarquer que :  $N_2(A) = \sqrt{\text{tr}(A^T \bar{A})}$

### 3.2 Sur $B(I, K)$

#### 3.2.1 Notations

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . En particulier on peut prendre  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

**Définition.** Alors on dit qu'une fonction  $f$  définie sur  $I$ , à valeurs dans  $K$  est *bornée* sur  $I$  si et seulement si  $\exists M > 0$ ,  $\forall x \in I$   $|f(x)| \leq M$

On notera  $B(I, K)$  l'ensemble des fonctions à valeurs dans  $K$  bornées sur  $I$ .

**Lemme.**  $B(I, K)$  est un  $K$  espace vectoriel.

preuve :

#### 3.2.2 Norme

**Définition.** On pose, pour tout  $f \in B(I, K)$  :  $N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ .

Alors  $N_\infty$  est une norme sur  $B(I, K)$  appelée "norme infinie".

preuve :

**Remarques.** Si  $E = C^0([a; b], \mathbb{R})$  avec  $[a; b]$  un segment non vide de  $\mathbb{R}$ , alors  $E$  est un sous espace vectoriel de  $B([a; b], \mathbb{R})$  et on peut, par restriction, définir une norme infinie sur  $E$ .

### 3.3 Autre exemple

**Exercice.** Soit  $[a, b]$  un segment de longueur non nulle de  $\mathbb{R}$ . On pose  $E = C^0(I, K)$  et  $\forall f \in E$   $N(f) = \int_a^b |f(t)| dt$   
Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .

## 4 Distance associée à une norme

Dans ce paragraphe  $(E, \|\cdot\|)$  est un  $K$  espace vectoriel normé.

### 4.1 Définition

**Définition.** On pose : 
$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \|x - y\|$$
 Alors :  $d$  est appelée *distance associée à  $\|\cdot\|$*

**Remarque.** Si la norme est euclidienne alors on dit que la distance est euclidienne.

### 4.2 Propriétés

**Propriétés.** On a pour tout  $x, y, z \in E$  :

$$\begin{cases} i) & d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ ii) & d(x + z, y + z) = d(x, y) \\ iii) & d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{cases}$$

preuve et interprétation :

### 4.3 Boules

#### 4.3.1 Définitions

**Définitions.** Soit  $a \in E$  et  $r > 0$ . Alors on pose :

$$\begin{cases} \mathring{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\} \\ \overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\} \\ S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\} \end{cases}$$

$\mathring{B}(a, r)$  est appelée *boule ouverte* de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

$\overline{B}(a, r)$  est appelée *boule fermée* de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

$S(a, r)$  est appelée *sphère* de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

**Remarques.** Si  $r = 1$  on parle de *boule unité* ou de *sphère unité*.

$\overline{B}(a, r)$  s'obtient par translation et homothétie de  $\overline{B}(0_E, 1)$ .

Les boules ont donc toutes la même forme.

Dans  $\mathbb{R}$  les boules associées à la valeur absolue sont des intervalles.

#### 4.3.2 Boules unités associées aux normes usuelles de $\mathbb{R}^2$

DESSINS des boules unités associés aux normes 1, 2 et  $\infty$

## 5 Comparaisons de normes

Dans cette partie  $E$  désigne un  $K$  espace vectoriel.

### 5.1 Normes équivalentes

**Définition.** Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ .

Alors on dit que :  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes *équivalentes sur  $E$*  si et seulement si  $\exists \alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que :  $\forall x \in E$ ,  $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$

**Remarque.**  $\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x)$  donc on peut échanger le rôle de  $N_1$  et  $N_2$ .

#### 5.1.1 Propriétés

**Proposition.** Si  $N_1, N_2$  et  $N_3$  sont des normes sur  $E$  alors :

i)  $N_1$  est équivalente à  $N_1$  (réflexivité)

ii)  $N_1$  est équivalente à  $N_2 \Rightarrow N_2$  est équivalente à  $N_1$  (symétrie)

iii)  $N_1$  est équivalente à  $N_2$  et  $N_2$  est équivalente à  $N_3 \Rightarrow N_1$  est équivalente à  $N_3$  (transitivité)

**Remarque.** On parle de relation d'équivalence ...

preuve :

### 5.2 En dimension finie

#### 5.2.1 Equivalence de norme

**Théorème .** Dans un  $K$  espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

preuve : H-P

### 5.3 Exemples

#### 5.3.1 Dans $K^n$

**Lemme.** Dans  $K^n$  les normes :  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes et  $\forall x \in K^n$  : 
$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \end{cases}$$

preuve :

#### 5.3.2 Normes non équivalentes

**Exercice.** Soit  $E = C^0([0, 1])$ , on pose  $\forall f \in E$ ,  $N(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$  et  $N'(f) = \int_0^1 |f(x)| dx$

Calculons  $N(f_n)$  et  $N'(f_n)$  avec  $f_n : x \mapsto x^n$

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Norme</b>	<b>1</b>
1.1	Définition . . . . .	1
1.2	Premières propriétés . . . . .	1
1.3	Cas particulier : norme euclidienne . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Normes usuelles sur <math>K^n</math></b>	<b>1</b>
2.1	Norme 1 . . . . .	1
2.2	Norme 2 . . . . .	1
2.3	Norme infinie . . . . .	2
2.4	Extension . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Autres normes usuelles</b>	<b>2</b>
3.1	Sur $M_n(K)$ . . . . .	2
3.2	Sur $B(I, K)$ . . . . .	2
3.2.1	Notations . . . . .	2
3.2.2	Norme . . . . .	2
3.3	Autre exemple . . . . .	2
<b>4</b>	<b>Distance associée à une norme</b>	<b>3</b>
4.1	Définition . . . . .	3
4.2	Propriétés . . . . .	3
4.3	Boules . . . . .	3
4.3.1	Définitions . . . . .	3
4.3.2	Boules unités associées aux normes usuelles de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Comparaisons de normes</b>	<b>4</b>
5.1	Normes équivalentes . . . . .	4
5.1.1	Propriétés . . . . .	4
5.2	En dimension finie . . . . .	4
5.2.1	Equivalence de norme . . . . .	4
5.3	Exemples . . . . .	4
5.3.1	Dans $K^n$ . . . . .	4
5.3.2	Normes non équivalentes . . . . .	4