PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 18/11/2024 AU 22/11/2024

Probabilités

Programme de la semaine dernière.

Espérance - Variance

1) Espérance

(1) Définition. Espérance des lois usuelles. Cas particulier d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(2) Théorème de transfert. Propriétés : comparaison, linéarité, positivité/croissance, critère de nullité (presque sûre) dans le cas d'une v.a. positive, espérance d'un produit en cas d'indépendance.

2) Variance

(1) Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. Cauchy-Schwarz. L'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles X définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et telles que $E(X^2) < +\infty$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Définition de la variance et de l'écart-type. Formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Variance des lois usuelles.

(3) Propriétés : $V(aX + b) = a^2V(X)$, covariance, variance d'une somme en cas d'indépendance deux à deux.

3) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

(1) Inégalité de Markov - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(2) Loi faible des grands nombres.

Questions de cours :

(1) Définition d'un système quasi-complet d'événements. Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales dans le cas d'un tel système.

(2) Définition, espérance et variance de la loi géométrique et/ou de la loi de Poisson (au choix de l'interrogateur).

(3) Si X et Y sont deux var indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

(4) Définition de la variance (sous l'hypothèse $E(X^2) < +\infty$, on justifiera que X est d'espérance finie puis que la variance est bien définie). Démonstration de la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(5) Énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et de la loi faible des grands nombres.