Mathématiques et physique — Équations différentielles

Rappels sur les **équations différentielles linéaires homogènes** [1] de base.
Les équations différentielles **homogènes** décrivent le **régime libre** d'un système.

Système du premier ordre

Équation différentielle	Solution générale
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay(x) = 0$	$y(x) = A\,\mathrm{e}^{-ax}$

- La constante a a la même dimension que $1/x$.
- La constante A est déterminée par une condition particulière ; si $y(0)$ est donné, la solution s'écrit $\boxed{y(x) = y(0)\,\mathrm{e}^{-ax}}$; dans le cas général si $y(x_0)$ est donné, on obtient $y(x) = y(x_0)\,\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}$.

Dans le cas d'une fonction du temps $y(t)$, on pose $\tau = 1/a$, où $\tau > 0$ est le **temps caractéristique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{y(t)}{\tau} = 0}\,.$$

Quelle que soit la condition initiale, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Système du second ordre

Équation différentielle	Les solutions dépendent de la nature des solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, donc du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue trois types de solutions.
$a\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy(x) = 0$	$\Delta > 0$: deux racines réelles r_1 et r_2 $y(x) = A\,\mathrm{e}^{r_1x} + B\,\mathrm{e}^{r_2x}$
	$\Delta = 0$: une racine réelle double r_0 $y(x) = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{r_0x}$
	$\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées $r_1 = u + \mathrm{i}v$ et $r_2 = u - \mathrm{i}v$ $y(x) = \mathrm{e}^{ux}[A\cos(vx) + B\sin(vx)]$

- Les deux constantes A et B sont déterminées par deux conditions particulières, qui peuvent porter sur y ou ses dérivées en des points donnés.
- Dans le cas $\Delta < 0$, la solution peut être cherchée sous la forme $y(x) = A\,\mathrm{e}^{ux}\cos(vx + \varphi)$, où les deux constantes sont A et φ.

1. Une équation différentielle homogène a un second membre nul.

Formes canoniques en physique

Il existe plusieurs formes canoniques de l'équation différentielle linéaire du second ordre en physique. On considère une fonction du temps $y(t)$.

Forme canonique	Grandeurs caractéristiques
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0}$	pulsation propre : ω_0 facteur de qualité : Q sans dimension
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\sigma\omega_0\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0}$	pulsation propre : ω_0 facteur d'amortissement : σ sans dimension
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0}$	pulsation propre : ω_0 coefficient d'amortissement : λ avec $[\lambda] = T^{-1}$

Trois types de régimes sont possibles, selon le signe du discriminant Δ. Avec la forme canonique utilisant le coefficient d'amortissement λ, on a :

Nature du régime	Δ	Forme de la solution	Condition
Apériodique	$\Delta > 0$	$y(t) = A\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})\,t} + B\,\mathrm{e}^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})\,t}$	$\lambda > \omega_0$, ou $Q < 1/2$, ou $\sigma > 1$
Critique	$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$	$\lambda = \omega_0$, ou $Q = 1/2$, ou $\sigma = 1$
Pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$y(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$	$\lambda < \omega_0$, ou $Q > 1/2$, ou $\sigma < 1$

Quel que soit le type de régime et quelles que soient les conditions initiales, on a

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$$

Complément sur le régime pseudo-périodique

- La pseudo-pulsation est $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0\sigma}$.
- La pseudo-période, période des termes sinusoïdaux, est $T = 2\pi/\Omega$.
- Le système est dit faiblement amorti si $Q \gg 1$ (ou $\sigma \ll 1$). On a alors $\Omega \approx \omega_0$. On montre que le nombre d'oscillations « visibles » est alors de l'ordre de Q.

Cas particulier fondamental

Équation différentielle	Condition	Solution générale
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + ay(x) = 0, \quad a \in \mathbf{R}$	$a = k^2 > 0$	$y(t) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$
	$a = 0$	$y(t) = Ax + B$
	$a = -k^2 < 0$	$y(t) = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx}$

➤ Le cas $a = k^2 > 0$ correspond à l'**oscillateur harmonique** :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y(x) = 0}\,.$$

C'est le seul cas dont la solution (ou sa dérivée) peut s'annuler en deux points distincts.
La solution générale peut s'écrire

$$\boxed{y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)} \quad \text{ou} \quad y(x) = A'\cos(kx+\varphi) = B'\sin(kx+\psi)\,.$$

La première forme permet en général de déterminer facilement les constantes. En particulier, en fonction des symétries du système, si $y(x)$ est paire on a $B = 0$, et si $y(x)$ est impaire on a $A = 0$.

➤ Le cas $a = -k^2 < 0$ correspond à

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y(x) = 0}\,.$$

La solution générale peut s'écrire

$$\boxed{y(x) = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{y(x) = A'\cosh(kx) + B'\sinh(kx)}\,.$$

La première forme est plus simple si l'on doit envisager $x \to +\infty$ (on a alors $A = 0$) ou $x \to -\infty$ (on a alors $B = 0$).
La seconde forme est plus simple si $y(x)$ est paire (on a alors $B' = 0$) ou impaire (on a alors $A' = 0$) ; elle est aussi plus simple si une condition initiale est $y(0) = 0$ (on a alors $A' = 0$) ou $\dfrac{dy}{dx}(x=0) = 0$ (on a alors $B' = 0$).

Extension en complexes

Équation différentielle	Solution générale
$\dfrac{d^2\underline{y}}{dx^2} + \underline{a}\,\underline{y}(x) = 0, \quad a \in \mathbf{C}$	$\underline{y}(t) = \underline{A}\,e^{\underline{\lambda}x} + \underline{B}\,e^{-\underline{\lambda}x}$ avec $\underline{\lambda}^2 = \underline{a}$

➤ Cas particulier où $\underline{a}$ est imaginaire pur : $\underline{a} = ib$, avec $b \in \mathbf{R}$.

On a alors $\underline{\lambda}^2 = ib = b\,e^{i\pi/2}$, d'où $\lambda = \pm\sqrt{b}\,e^{i\pi/4}$, soit $\lambda = \pm(1+i)\sqrt{\dfrac{b}{2}}$.

Ce cas est rencontré dans l'étude de l'effet de peau.